ФГОС

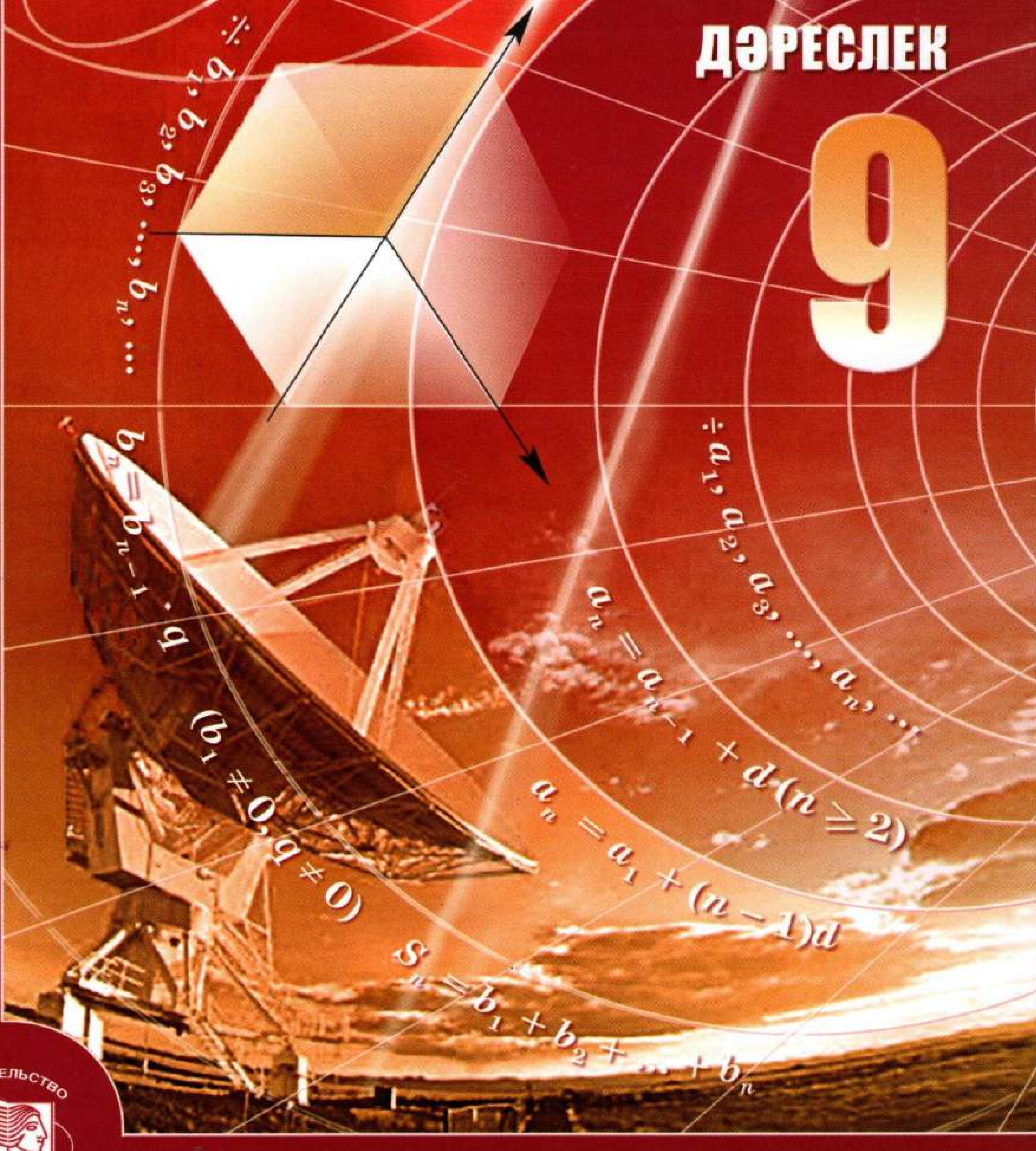
А. Г. МОРДКОВИЧ, П. В. СЕМЕНОВ

Алгебра

2 кисәк

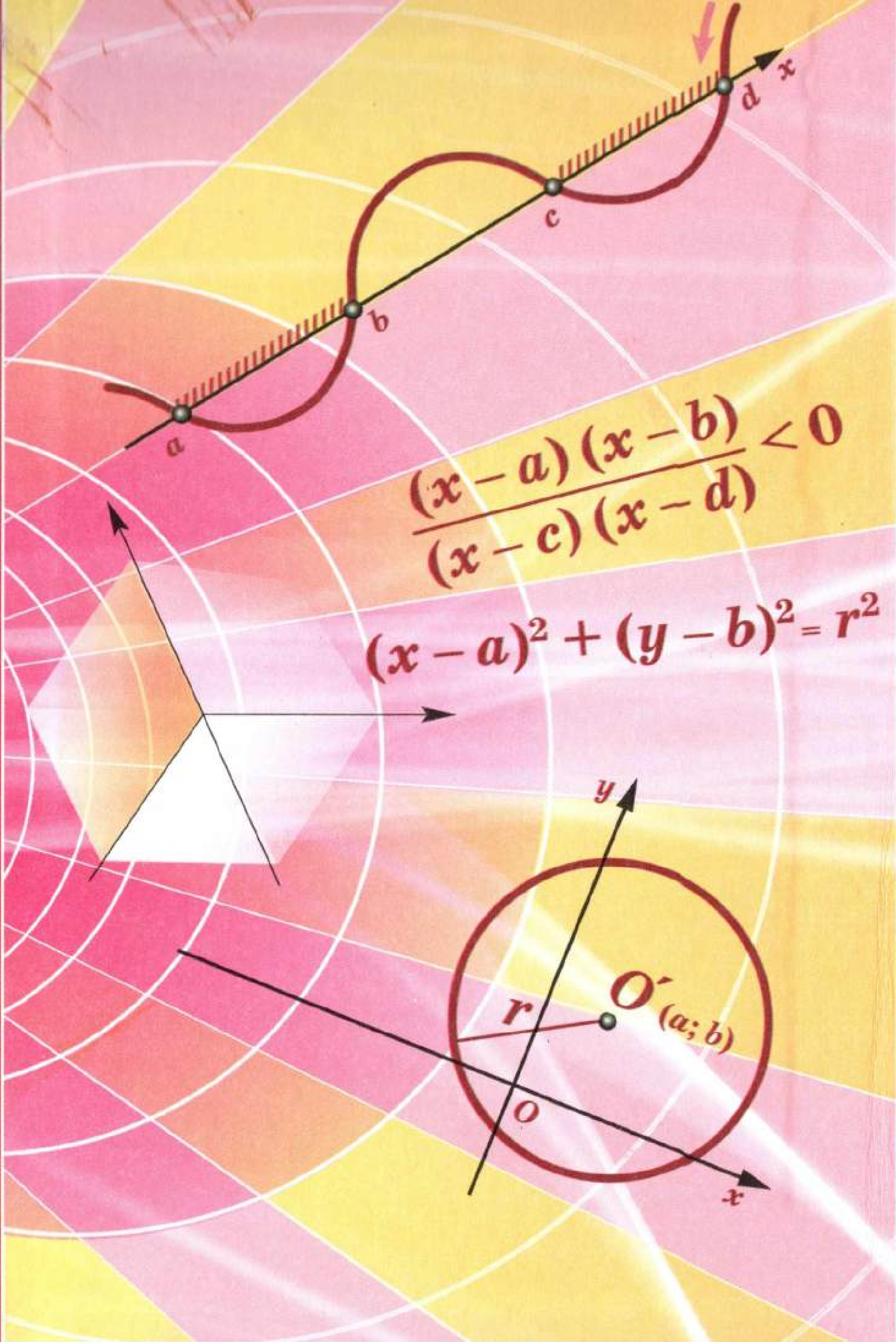
ДӘРЕСЛЕК

9

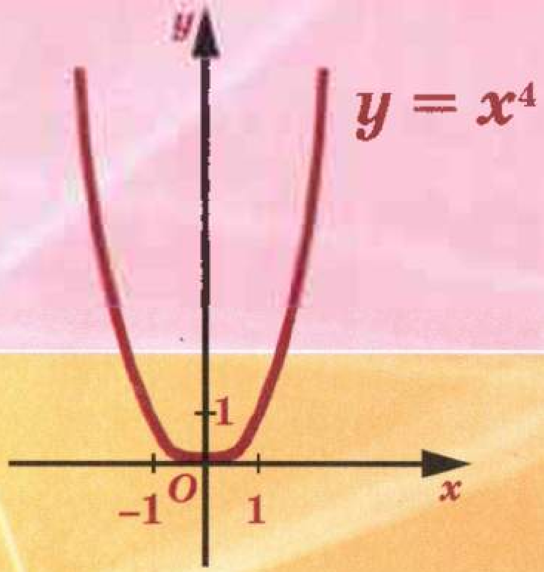


ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

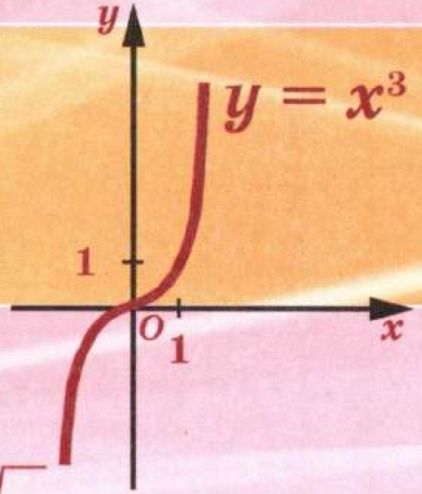
ФГОС
А. Г. МОРДКОВИЧ П. В. СЕМЕНОВ
Алгебра
ДӘРЕСЛЕК
9



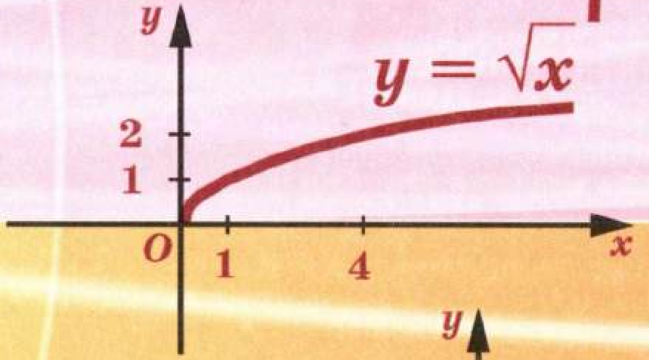
x
a
b
c
d
$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} < 0$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
y
r
$O'(a; b)$
O
x



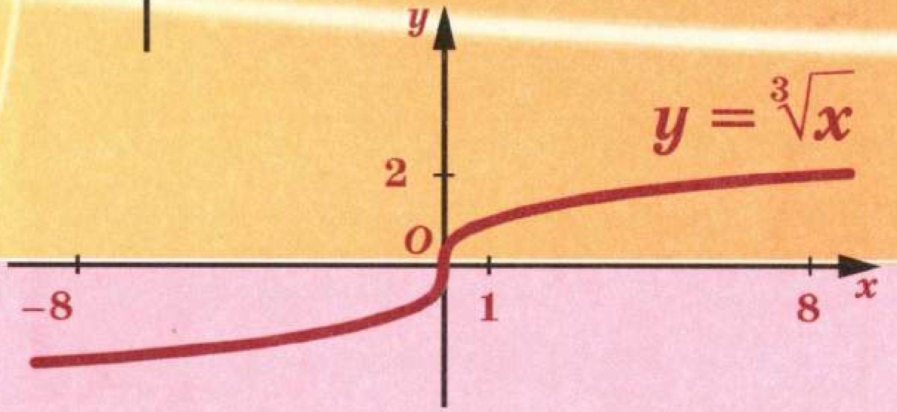
y
$y = x^4$
1
−1
O
1
x



y
$y = x^3$
1
O
1
x



y
$y = \sqrt{x}$
2
1
O
1
4
x



y
$y = \sqrt[3]{x}$
2
O
−8
1
8
x

Гомуми белем учрежденияләренең
7—11 сыйныфларында алгебра курсын
өйрәнүнең яңа концепциясен
эшләгәне һәм гамәлгә
керткәне өчен укыту-методик
комплектлар авторлары
(җитәкчесе — А.Г. Мордкович)
Россия Федерациясе Президентының
2001 ел өчен мәгариф өлкәсендәге
премиясе белән бүләкләнә

А. Г. МОРДКОВИЧ, П. В. СЕМЕНОВ

Алгебра

9 сыйныф

Ике кисәктә

1 кисәк

Гомуми белем бирү учреждениеләре өчен

ДӘРЕСЛЕК

*Россия Федерациясе
Мәгариф һәм фән министрлыгы
тарафыннан тәкъдим ителгән*

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2014 **Казан 2014**

Хәтер

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 17-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2014. — 232 с. : ил.

ISBN 978-5-346-03029-4

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 9 нчы сыйныф. Ике кисәктә. 1 нче кисәк. Гомуми белем бирү учреждениеләре өчен д-лек / А. Г. Мордкович. — Русчадан Р. С. Вафина тәрж. — Казан : «Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты», 2014. — 232 б. : ил.

ISBN 978-5-94113-443-4

Дәреслектә төп гомуми белем мәктәбенең алгебра курсы өчен теоретик материал тупланган. Ул әр-яңа концепциягә нигезләнә, ә инде бу концепциянең иң мөһим төшенчәләре булып математика теле һәм математик модель тора, өстенлекле методик юнәлеше сыйфатында функциональ-график юнәлеш алынган. Дәреслектә җентекләп аңлатулы мисаллар бик күп. Мөстәкыйль эшләү өчен күнегүләр икенче кисәккә (мәсьәләләр җыентыгына) урнаштырылган. Материалны аңлаешлы гади телдә бирү укучыларны фәнни әдәбият укырга һәм кирәкле мәгълүматны мөстәкыйль рәвештә таба белергә өйрәтә.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных организаций

Татарчага русчадан тәрҗемә

Редакторы *Р.С. Вафина*
Корректоры *Ф.Ш. Гайнетдинова*
Компьютерда биткә салучысы *Э.И. Уракова*

Оригинал макетка басарга кул куелды 25.07.2014
Форматы 60х90 1/16. Офсет кәгазе №1. «TextBook» гарнитурасы
Шартлы басма табагы 14. Тиражы 1500 д. Заказ

420111. Казан, Тельман ур., 5.
Хатлар өчен: 420014. Казан, Кремль, а/я 54.
Тел. (843) 264-67-96.

ISBN 978-5-346-03029-4 (ч. 1)
ISBN 978-5-346-03028-7 (общ.)

ISBN 978-5-941-13443-4

© «Мнемозина», 1999
© «Мнемозина», 2013, үзгәртүләр белән
© «Мнемозина», 2014
© Бизәлеше. «Мнемозина», 2014
Барлык хокуклар саклана
© Татарчага тәрҗемә, Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты, 2014

КЕРЕШ

Кадерле тугызынчы сыйныф укучылары!

9 нчы сыйныфта алгебра курсын өйрәнү өчен сездә ике китап: дәреслек һәм мәсьәләләр җыентыгы булырга тиеш. Бу бердәм комплект: беренче кисәк – дәреслек, икенче кисәк – мәсьәләләр җыентыгы. Хәзер сезнең кулыгызда беренче кисәк – дәреслек.

Математика дәресләрендә укытучы һәрвакыт көнкүреш теле (аралашу теле, әдәби сөйләм теле) белән фәнни телне – катгый, кыска, математикада кабул ителгән законнарга таянып төзелгән махсус атамалар һәм символлар телен кушып аңлата. Без дә дәреслекне шушы ике телне акылга ярашлы дәрәҗәдә кушып төзергә тырыштык. Нәтиҗәдә укып аңлау өчен (ятлап сөйләү өчен түгел) кирәкле китап килеп чыкты.

Без беләбез, күп кенә укучылар дәреслекне, бигрәк тә математика дәреслеген укырга яратмыйлар, дәрестә укытучының сөйләве җитә дип уйлыйлар. Моңа каршы безнең үз фикеребез бар. Психологлар, укыту барышында укучы кешегә ике төрле тәэсир – тышкы сөйләм һәм эчке сөйләм тәэсире бар, диләр. Тышкы сөйләм – укытучы сөйли, ә сез тыңлыйсыз дигән сүз. Эчке сөйләм – димәк, сез үзегез дәреслекне укыйсыз һәм эчтән сөйләп, кабатлап барасыз. Беренче очракта укучылар пассив, ә икенчесендә – актив. Сез инде хәзер шактый ук җитди кешеләр һәм актив хезмәттән башка берни дә килеп чыкмавын яхшы беләсез. Димәк, дәреслекне укымыйча, фәнне өйрәнеп булмый. Шуны онытмагыз: укытучының дәрестә вакыты бик чикле, ул барысын да җентекләп аңлатып бирергә өлгерми. Ә дәреслектә барысы да аңлаешлы язылган. Һәм тагын бер әһәмиятле искәрмә, әйтик, сез өй эшен үтисез, һәм мәсьәләләр җыентыгыннан ниндидер күнегү барып чыкмый, ди. Әгәр шул вакытта дәреслекнең тиешле параграфын ачып карыйсыз икән, чишелеше әйбәтләп аңлатып бирелгән охшаш мисалны һичшиксез табачаксыз.

Дәреслеккә, теоретик материалдан тыш, бик күп төрле мисаллар кертелде.

Шулай итеп, иренмәгез генә, дәреслекне укыгыз!

Дәреслек биш бүлектән тора, һәр бүлек параграфларга бүленгән. Һәр бүлек «Төп нәтиҗәләр» белән тәмамлана. Өйрәнү процессын уңышлы итү өчен бу бик мөһим. Болардан тыш, һәр параграфның диярлек ахырында – үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар, ә һәр бүлек ахырында тикшерену эшләре өчен темалар бирелде.

Ниндидер параграфны өйрәнгәннән соң, игътибар белән үз-үзеңне тикшерү өчен бирелгән сорауларны укып чыгыгыз һәм аларга җавап бирергә тырышыгыз. Кыенлыклар булса, дәреслекнең шул параграфыннан барлык сорауларга җавап табарга мөмкин. Тикшеренү эшләре өчен темалар сезгә математика буенча белемнәрегезне киңәйтергә ярдәм итәр.

Сезгә уңышлар телибез!

№3519 « » 20 г.
ИНН 1624004174

УКЫТУЧЫ ӨЧЕН КЕРЕШ СҮЗ

Дәреслеккә таянып, укытучы нәрсәне укучыларга дәрестә сөйләргә, нәрсәне истә тоту зарурлыгын күрсәтергә, ә нәрсәне өйдә укырга тәкъдим итәргә (һәм икенче дәрестә әңгәмә рәвешендә фикерләшергә) кирәген бик яхшы аңлаячак.

Кайбер очракларда текст петит белән җыелды. Бу — барлык укучылар өчен мәҗбүри материал түгел, математика белән кызыксынучыларга адресланган.

Мәктәп алгебра курсының төп эчтәлек һәм методик юнәлткечләре арасыннан өстенлек функциональ-график юнәлешкә бирелде. Ягъни барыннан да элек, функция, тигезләмә, рәвешүзгәртүләрнең нинди генә классы өйрәнелсә дә, материал һәрвакыт катгый схема:

функция — тигезләмәләр — рәвешүзгәртүләр

схемасы буенча төзелә.

Функциональ-график юнәлешне тулысы белән тормышка ашыру өчен, 9 нчы сыйныф алгебра курсы аеруча мөһим урын тота. 7-8 нче сыйныфларда функцияләрне, аларның үзлекләрен һәм графикларын өйрәнү тәҗрибәсенә таянып, шул сыйныфларда функцияләр белән бәйле төп төшенчәләрне күрсәтмә-интуитив дәрәҗәдә караганнан соң, 9 нчы сыйныфта, мөмкинлекләрдән чыгып, иҗади төшенү дәрәҗәсенә күтәрелəбез.

Дәреслектә бик күп мисалларның аңлатмалы чишелешләре бирелде. Чишелешнең азагын йә «җавап» сүзе, йә ■ тамгасы күрсәтә.

Тагын шуңа игътибар итегез: дәреслеккә һәм мәсьәләләр җыентыгына махсус **электрон өстәмә** (В. В. Шеломовский редакциясендә) эшләнде, ул исә 9 нчы сыйныф укучыларына уку материалын өйдә мөстәкыйль өйрәнергә, ә укытучыга дәрестә укыту процессын оештырырга ярдәм итәчәк. Ярдәмлектә графиклар төзүгә, тигезләмәләр һәм мәсьәләләр чишүгә караган берничә йөз интерактив рәсем тупланган.

Авторлар

1 БҮЛЕК Рациональ тигезсезлекләр һәм аларның системалары

§ 1. Сызыкча һәм квадрат тигезсезлекләр
§ 2. Рациональ тигезсезлекләр
§ 3. Куплекләр һәм алар белән гамәлләр
§ 4. Тигезсезлекләр системалары

§ 1. СЫЗЫКЧА ҺӘМ КВАДРАТ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

Параграфның исемен күргәч, сез, бәлки: «Нигә без һаман бер урында таптанабыз?» – дип сорарсыз. Чынлап та, бер үзгәрешле сызыкча һәм квадрат тигезсезлекне сез инде 8 нче сыйныф алгебра курсында чишәргә өйрәнгән идегез, ул соңгы темаларның берсе иде. Һәм сез бу параграфта әллә ни яңалык тапмассыз, әле шуның өстенә кайбер мисалларның «Алгебра-8»дән алынганын да күрерсез. Бу параграфны кабатлау мөмкинлеге итеп кабул итегез – ул сезне акрынлап яңа теманы өйрәнүгә әзерли.

Исегезгә төшерәбез, $ax + b > 0$ рәвешендәге ($>$ тамгасы урынында башка төрле тигезсезлек тамгасы да торырга мөмкин) тигезсезлекне **бер x үзгәрешле сызыкча тигезсезлек** дип атыйлар, биредә a һәм b – реаль саннар ($a \neq 0$). Ә инде $ax^2 + bx + c > 0$ рәвешендәге тигезсезлекне **бер x үзгәрешле квадрат тигезсезлек** дип атыйлар (биредә a, b, c – реаль саннар, $a = 0$ дән башка).

x үзгәрешлесенең $f(x) > 0$ тигезсезлеген дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерә торган кыйммәтен **тигезсезлекнең чишелеше** (яки **аерым чишелеше**) дип атыйлар. Тигезсезлекнең барлык аерым чишелешләре күплеге тигезсезлекнең **гомуми чишелеше** (яки **чишелеше**) дип атала.

1 нче искәрмә. Күргәнегезчә, «чишелеш» атамасын тигезсезлекнең гомуми чишелеше мәгънәсендә дә, аерым чишелеше мәгънәсендә дә кулланалар.

Ике тигезсезлек, $f(x) < g(x)$ һәм $r(x) < s(x)$, бер үк төрле чишелешкә ия булсалар (аерым алганда, икесенең дә чишелеше булмаса), **тигезкөчле** тигезсезлекләр дип атала. Болай дип тә әйтергә мөмкин: әгәр беренче тигезсезлекнең теләсә кайсы аерым чишелеше икенче тигезсезлекнең аерым чишелеше булып торса һәм киресенчә, икенче тигезсезлекнең теләсә кайсы аерым чишелеше беренче тигезсезлекнең аерым чишелеше булса, бу ике тигезсезлек тигезкөчле була.

Гадәттә тигезсезлекләрне чишкәндә, бирелгән тигезсезлекне аңа тигезкөчле булган гадирәге белән алыштырырга тырышалар. Мондый алыштыру **тигезсезлекне тигезкөчле рәвешүзгәртү** дип атала. Әлеге рәвешүзгәртүләр түбәндәге 1–3 нче кагыйдәләрдә күрсәтелгән.

1 нче кагыйдә. ***Тигезсезлекнең теләсә кайсы буынын, тигезсезлекнең тамгасын үзгәртмичә, аның бер ягының икенчесенә капма-каршы тамгасы белән күчерергә мөмкин.***

Болай да әйтәләр: тигезсезлекнең нинди дә булса буынын капма-каршы тамгасы белән аның икенче ягына чыгарып, тигезсезлек тамгасын саклап калганда, бирелгәненә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Мәсәлән, $3x + 5 < x^2$ тигезсезлеге $-x^2 + 3x + 5 < 0$ тигезсезлегенә тигезкөчле: x^2 буыны тигезсезлекнең икенче ягына капма-каршы тамгасы белән күчерелгән һәм тигезсезлекнең тамгасы үзгәртелмәгән.

2 нче кагыйдә. ***Тигезсезлекнең ике ягын да, аның тамгасын үзгәрешсез калдырып, бер үк уңай санга тапкырларга яки бүлергә мөмкин.***

Мәсәлән, $8x - 4 > 12x^2$ тигезсезлеге $2x - 1 > 3x^2$ тигезсезлегенә тигезкөчле: беренче тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай 4 санына бүлгәннәр, ә тигезсезлек тамгасы шул ук калган.

3 нче кагыйдә. ***Тигезсезлекнең ике ягын да, тамгасын капма-каршысына үзгәртеп ($<$ тамгасын $>$ га, $\leqslant$ тамгасын $\geqslant$ ка), бер үк тискәре санга тапкырларга яки бүлергә мөмкин.***

Мәсәлән, $-2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$ тигезсезлеге $2x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$ тигезсезлегенә тигезкөчле: тигезсезлекнең ике ягын да бер үк тискәре -1 санына тапкырлаганнар, ә тигезсезлек тамгасы капма-каршысына үзгәртелгән.

2 нче һәм 3 нче кагыйдәләр түбәндәге гомумиләштерүләр ясарга мөмкинлек бирә (бу расламалар теорема булсалар да, гадилек өчен биредә кагыйдә итеп кертелде).

2 нче кагыйдә*. ***Үзгәрешле x кергән тигезсезлекнең ике ягын да x ның барлык кыйммәтләрендә дә уңай булган f(x) аңлатмасына тапкырлап яки бүлеп, бирелгән тигезсезлекнең тамгасын үзгәртмәгәндә, бирелгәненә тигезкөчле тигезсезлек табыла.***

3 нче кагыйдә*. ***Үзгәрешле x кергән тигезсезлекнең ике ягын да, x ның барлык кыйммәтләрендә тискәре булган p(x) аңлатмасына тапкырлап яки бүлеп, бирелгән тигезсезлекнең тамгасын капма-каршысына үзгәрткәндә, бирелгәненә тигезкөчле тигезсезлек табыла.***

Мисал өчен 3 нче кагыйдәне* исбатларбыз.

$f(x) > g(x)$ тигезсезлеге һәм x ның барлык кыйммәтләрендә дә тискәре $p(x)$ аңлатмасы бирелгән. Әйтик, $x = A$ $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең аерым чишелеше, ди. Бу $f(a) > g(a)$ – дөрес санлы тигезсезлек дигән сүз. Аның ике ягын да тискәре $p(a)$ санына тапкырлап, $f(a)p(a) < g(a)p(a)$ ны дөрес санлы тигезсезлек табабыз. Димәк, $x=a$ тамыры $f(x)p(x) < g(x)p(x)$ тигезсезлегенең аерым чишелеше була. Ягъни $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең һәр чишеле алдагы тигезсезлегенең аерым чишелеше була. Бу исә $x = a$ ның $f(x)p(x) < g(x)p(x)$ тигезсезлегенең чишелеше икәнен күрсәтә. Димәк, $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең теләсә кайсы аерым чишелеше $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең аерым чишелеше була.

Киресенчә, $x = b$ саны $f(x)p(x) < g(x)p(x)$ тигезсезлегенең аерым чишелеше булсын. Ягъни $f(b)p(b) < g(b)p(b)$ – дөрес санлы тигезлек. Аның ике ягын да тискәре $p(b)$ санына бүлеп, $f(b) > g(b)$ – дөрес санлы тигезсезлек табабыз. Бу исә $x = b$ саны – $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең аерым чишелеше дигән сүз. Шулай итеп, $f(x)\,p(x) < g(x)p(x)$ тигезсезлегенең теләсә кайсы аерым чишелеше $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенең дә аерым чишелеше икәнен исбатладык.

Нәтиҗә: $f(x) > g(x)$ һәм $f(x)p(x) < g(x)p(x)$ тигезсезлекләре тигезкөчле, биредә $p(x) < 0$.

Мәсәлән, $(2x + 1)(x^2 + 2) > 0$ тигезсезлеге $2x + 1 > 0$ тигезсезлегенә тигезкөчле: бирелгән тигезсезлекнең ике ягын да x ның теләсә кайсы кыйммәтләрендә дә уңай булган $x^2 + 2$ аңлатмасына бүлдек һәм тигезсезлекнең тамгасын үзгәрешсез калдырдык.

$\frac{3x-4}{-x^4-1} \leqslant 0$ тигезсезлеге $3x - 4 \geqslant 0$ тигезсезлегенә тигезкөчле: бирелгән тигезсезлекнең ике ягын да x ның барлык кыйммәтләрендә дә тискәре булган $-x^4 - 1$ аңлатмасына бүлдек һәм тигезсезлекнең тамгасын үзгәрттек.

1 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}.$$

Чишү. Тигезсезлекнең ике ягын да уңай 15 санына тапкырлыйбыз һәм тигезсезлек тамгасын үзгәртмибез (2 нче кагыйдә). Моның белән без вакланмадан котылабыз һәм бирелгәненә тигезкөчле булган гадирәк тигезсезлеккә күчәбез:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x - 1) > 30x - 1;$$

$$11x - 3 > 30x - 1.$$

Тигезсезлекләр чишүнең 1 нче кагыйдәсен кулланып, $30x$ ны уң яктан – сулга, ә -3 буынын сул яктан уңга (капма-каршы тамгалары белән) чыгарабыз:

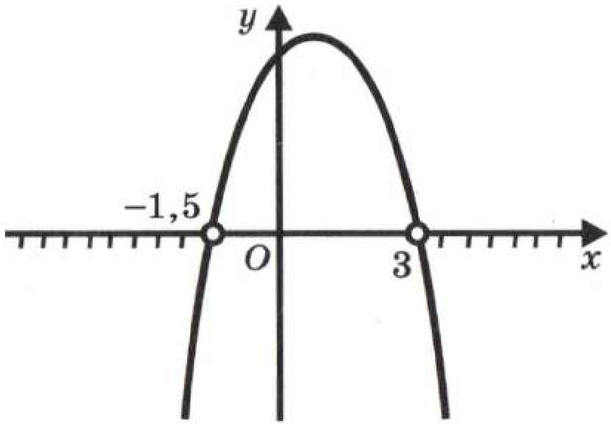
$$11x - 30x > -1 + 3;$$

$$-17x > 2.$$

Ниһаять, 3 нче кагыйдәне кулланып табабыз:

$x < -\frac{2}{17}$. ◄

2 нче искәрмә. Еш кына җавапның башка төрле язылышын – санлы арапык $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$ рәвешен дә кулланалар. Безнең карашка, тигезсезлекләр чишкәндә, җавапны иң гади тигезсезлек $x < -\frac{2}{17}$ рәвешендә язу дөресрәк булыр.



Рәс. 1

2 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә: $3x + 9 < 2x^2$.

Чишү: 1) Тигезсезлекне $3x + 9 - 2x^2 < 0$ рәвешенә китерәбез (1 нче кагыйдә нигезендә рәвешүзгәртү ясадык). $-2x^2 + 3x + 9$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз; моның өчен $-2x^2 + 3x + 9 = 0$ квадрат тигезләмәсен чишәбез:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1,5.$$

2) $y = -2x^2 + 3x + 9$ функциясе графигы булып торучы парабола x күчәрен 3 һәм −1,5 нокталарында кисә, ә аның тармаклары аска юнәлгән, чөнки $-2x^2 + 3x + 9$ квадрат өчбуынының өлкән буыны −2 гә, ягъни тискәре санга тигез. 1 нче рәсемдә функция графигы схематик төстә күрсәтелгән.

3) функция графигы x күчәренең аскы өлешендә урнашкан аралыкта, ягъни $(-\infty; -1,5)$ ачык нурында яки $(3; +\infty)$ ачык нурында $y < 0$ була.

Җавап: $x < -1,5$; $x > 3$.

8 сыйныфның алгебра курсында исбатланган һәм киләчәктә кирәк була торган ике расламаны искә төшерик.

1. *Әгәр квадрат өчбуынныңа $x^2 + bx + c$ тамырлары булмаса (ягъни аның дискриминанты D – тискәре сан) һәм $A > 0$ булса, x ның барлык кыйммәтләрендә $ax^2 + bx + c > 0$ тигезсезлеге үтәлә.*

Башкача әйтсәк, әгәр $D < 0$, $a > 0$ булса, $ax^2 + bx + c > 0$ тигезсезлеге x ның барлык кыйммәтләрендә дә үтәлә; киресенчә, бу очракта $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ тигезсезлегенең чишелешләре булмый.

2. *Әгәр квадрат өчбуынның $ax^2 + bx + c$ тамырлары булмаса (ягъни аның дискриминанты D – тискәре сан) һәм $A < 0$ булса, x ның барлык кыйммәтләрендә $ax^2 + bx + c < 0$ тигезсезлеге үтәлә.*

Башкача әйтсәк, әгәр $D < 0$, $a < 0$ булса, $ax^2 + bx + c < 0$ тигезсезлеге x ның барлык кыйммәтләрендә үтәлә; киресенчә, бу очракта $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ тигезсезлегенең чишелешләре булмый.

Бу расламалар – түбәндәге теореманың аерым очраклары.

Теорема ***Әгәр $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының дискриминанты тискәре булса, x ның теләсә нинди кыйммәтләрендә өчбуынның кыйммәте өлкән коэффициент a тамгасына ия була.***

3 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Чишү: а) $2x^2 - x + 4$ квадрат өчбуынының дискриминантын табабыз. $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$. Өчбуынның өлкән буыны (2 саны) уңай. Димәк, теорема буенча, x ның теләсә кайсы кыйммәтендә $2x^2 - x + 4 > 0$ тигезсезлеге үтәлә, ягъни бирелгән тигезсезлекнең чишелеше булып барлык саннар турысы $(-\infty; +\infty)$ тора.

б) $-x^2 + 3x - 8$ квадрат өчбуынының дискриминантын табабыз. $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23 < 0$. Өчбуынның өлкән буыны (-1 саны) тискәре. Димәк, теорема буенча, теләсә кайсы x өчен $-x^2 + 3x - 8 < 0$ тигезсезлеге үтәлә. Шулай булгач, бирелгән $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ тигезсезлеге x ның бер генә кыйммәтендә дә үтәлми, ягъни аның чишелеше булмый.

Җавап: а) $(-\infty; +\infty)$; б) чишелешләре юк.

3 нче искәрмә. Кайвакыт «чишелешләре юк» дигән сүзләр урынына $\varnothing$ символы – буш күплекне аңлатучы символ кулланыла (бу турыда соңрак, 28 нче биттә сөйләшербез).

Алдагы мисалда тагын бер төрле фикер йөртүне исегезгә төшерәбез.

4 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә: $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Чишү. $x^2 - 6x + 8$ квадрат өчбуынын сызыкча тапкырлаучыларга таркатабыз. Өчбуынның тамырлары – 2 һәм 4 саннары. 8 нче сыйныфтан билгеле булган $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ формуласын кулланып язабыз:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

Саннар турысында өчбуынның тамырларын: 2 һәм 4 не билгелибез (2 нче рәсем). $(x - 2)(x - 4)$ тапкырчыгышының кайчан уңай,

Рәс. 2

ә кайчан тискәре икәнен ачыклыйбыз. Әгәр $x > 4$ булса, $x - 2 > 0$ һәм $x - 4 > 0$, димәк, $(x - 2)(x - 4) > 0$. Әгәр $2 < x < 4$ булса, $x - 2 > 0$, ә $x - 4 < 0$, димәк, $(x - 2)(x - 4) < 0$. Әгәр инде $x < 2$ икән, $x - 2 < 0$ һәм $x - 4 < 0$, шунлыктан $(x - 2)(x - 4) > 0$. Безне xның $x^2 - 6x + 8$ квадрат өчбуынын уңай итә торган кыйммәтләре кызыксындыра. Бу ике ачык нурга туры килә: $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$.

Җавап: $x < 2$; $x > 4$.

Без әле генә кулланган фикер йөртү алымын гадәттә *интерваллар алымы* (яки *аралыклар алымы*) дип йөртәләр). Ул математикада рациональ тигезсезлекләрне чишү өчен актив кулланыла. Киләсе параграфта без интерваллар алымын ныклабрак өйрәнербез, ә бу параграфны модульле тигезсезлекләр белән тәмамларбыз.

5 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

а) $|x - 2| < 3$; б) $|x + 3{,}2| \leqslant 2$; в) $|10x| > 27$.

Чишү. $|x - a|$ аңлатмасының геометрик мәгънәсен исегезгә төшерәбез. Ул – координаталар (саннар) турысында x һәм a нокталары арасындагы ераклык, аны $\rho(x; a)$ дип билгелиләр (ρ – грек алфавиты хәрефе, «*ро*»):

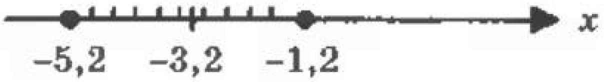
$$|x - a| = \rho(x; a).$$

Мәсәлән,

$|x - 2| = \rho(x; 2)$; $|x + 3{,}2| = \rho(x; -3{,}2)$; $|x| = \rho(x; 0)$.

а) $|x - 2| < 3$ тигезсезлеген болай аңлатып була: координаталар турысында $\rho(x; 2) < 3$ шартын канәгатьләндерә торган, ягъни 2 ноктасыннан 3 тән кимрәк ераклыкта ятучы барлык x нокталарын табарга кирәк. Болар — $(-1; 5)$ интервалында ятучы барлык нокталар һәм бары алар гына. $(-1; 5)$ интервалы – бирелгән тигезсезлекнең чишелеше була.

Рәс. 3



Рәс. 4

Рәс. 5

б) $|x + 3,2| \leqslant 2$ тигезсезлеген болай аңлатабыз: координаталар турысында $\rho(x; -3,2) \leqslant 2$ шартын канәгатьләндерә торган, ягъни −3,2 ноктасыннан 2 дән ким яки аңа тигез ераклыкта ятучы барлык x нокталарын табарга кирәк. Болар − $[-5,2; -1,2]$ кисемтәсендә ятучы барлык нокталар һәм бары алар гына (4 нче рәсем). $[-5,2; -1,2]$ кисемтәсе − бирелгән тигезсезлекнең чишелеше.

в) Башта тигезсезлекнең ике ягын да бер үк уңай 10 санына бүләбез: $|x| > 2,7$ килеп чыга. $|x| > 2,7$ тигезсезлеген болай аңлатабыз: координаталар турысында $\rho(x; 0) > 2,7$ шартын канәгатьләндерә торган, ягъни 0 ноктасыннан 2,7 дән зуррак ераклыкта ятучы барлык x нокталарын табарга кирәк. Болар $(-\infty; -2,7)$ яки $(2,7; +\infty)$ ачык нурларында ятучы барлык нокталар һәм бары алар гына.

Җавап: а) $-1 < x < 5$; б) $-5,2 \leqslant x \leqslant -1,2$; в) $x < -2,7$; $x > 2,7$.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекнең аерым чишелеше дип нәрсәне атыйлар?

2. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекнең гомуми чишелеше (яки чишелеше) дип нәрсәне атыйлар?

3. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр нинди кагыйдәләргә нигезләнеп чишелә?

4. Нинди тигезсезлекләрне бер үзгәрешлеле сызыкча тигезсезлекләр дип атыйлар?

5. Тигезсезлекне чишү кагыйдәләрен кулланып, түбәндәге тигезсезлек ничек чишелә:

а) $3x + 10 \leqslant 0$; б) $3x + 6 > 5x + 14$.

6. Нинди очракта $f(x) > g(x)$ һәм $r(s) < s(x)$ тигезсезлекләрен тигезкөчле дип атыйлар?

7. Ни өчен $\frac{2x - 1}{3x + 5} < 1$ тигезсезлеген $2x - 1 < 3x + 5$ рәвешенә китерү − тигезкөчле түгел, ә $\frac{2x - 1}{3x^2 + 5} < 1$ тигезсезлеген $2x-1 < 3x^2 + 5$

тигезсезлеге белән алыштыру тигезкөчле рәвешүзгәртү була?

8. Нинди тигезсезлекләрне бер үзгәрешлеле квадрат тигезсезлекләр дип атыйлар?

9. $ax^2 + bx + c > 0$ (биредә $a \neq 0$) тигезсезлеген чишү алгоритмын сурәтләгез. Аны $x^2 - 4x + 3 > 0$ тигезсезлеген чишү өчен кулланыгыз.

10. $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ (биредә $a \neq 0$) тигезсезлеген чишү алгоритмын сурәтләгез. Аны $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ тигезсезлеген чишү өчен кулланыгыз.

11. $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының дискриминанты D тискәре һәм $a > 0$ икәне билгеле. Бу тигезсезлекнең чишелеше турында нәрсә әйтергә мөмкин:

а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

12. $ax^2 + bx + c$ квадрат өчбуынының дискриминанты D тискәре һәм $a < 0$ икәне билгеле. Бу тигезсезлекнең чишелеше турында нәрсә әйтергә мөмкин:

а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

13. $|a - b|$ (биредә a, b — реаль саннар) аңлатмасының геометрик мәгънәсе нидән гыйбарәт?

14. $|x - a|$ аңлатмасының геометрик мәгънәсен кулланып, тигезсезлекне чишегез:

а) $|x - 4| < 1$; б) $|x + 2| \geqslant 2$.

§ 2. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

Бер x үзгәрешле рациональ тигезсезлек – ул $h(x) > q(x)$ рәвешендәге тигезсезлек, биредә $h(x)$ һәм $q(x)$ – рациональ аңлатмалар, ягъни саннардан һәм x үзгәрешлесеннән кушу, алу, тапкырлау, бүлү һәм натураль дәрәҗәгә күтәрү ярдәмендә төзелгән алгебраик аңлатмалар. Билгеле инде, үзгәрешле теләсә нинди башка хәреф белән дә билгеләнә ала.

Рациональ тигезсезлекләрне чишкәндә, § 1 та әйтелгән кагыйдәләр кулланыла. Шул кагыйдәләр ярдәмендә бирелгән рациональ тигезсезлекне $f(x) > 0$ (< 0), биредә $f(x)$ – алгебраик вакланма (яки күпбуын), рәвешенә китерәләр. Аннан соң $f(x)$вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын $x - a$ рәвешендәге тапкырлаучыларга таркаталар (мөмкин булганда, билгеле) һәм алда әйтеп үтелгән *интерваллар алымын* (узган параграфтагы 4 нче мисал) кулланалар. Хәзер кайбер мисалларны карап үтәбез.

Рәс. 6

1 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

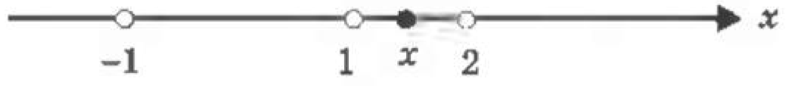
$$(x - 1)(x + 1)(x - 2) > 0.$$

Чишү. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$ аңлатмасын карыйбыз. Ул 1, −1, 2 ноктaларында 0 гә әйләнә; бу нокталарны саннар турысында билгелибез. Саннар турысы бу нокталар белән дүрт аралыкка бүленә (6 нчы рәсем), аларның һәркайсында $f(x)$ аңлатмасы даими тамгасын саклый. Моның дөреслеген һәр аралык өчен аерым фикер йөртеп тикшерәбез.

1) $(2; +\infty)$ аралыгыннан теләсә кайсы нокта алабыз. Бу нокта саннар турысында −1 ноктасыннан уңдарак, 1 ноктасыннан уңдарак һәм 2 ноктасыннан да уңдарак ята (7 нче рәсем). Димәк, $x > -1$, $x > 1$, $x > 2$. Тик бу вакытта $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 > 0$, димәк $f(x) > 0$ (өч уңай санның тапкырчыгышы буларак). Шулай итеп, $(2; +\infty)$ аралыгында $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә.

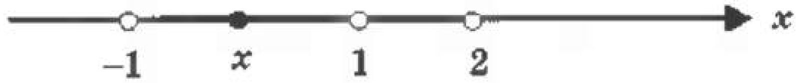
Рәс. 7

2) $(1; 2)$ аралыгыннан теләсә нинди нокта алабыз. Бу нокта саннар турысында −1 дән уңдарак, 1 дән уңдарак, 2 ноктасыннан сулдарак ята (8 нче рәсем). Димәк, $x > -1$, $x > 1$, тик $x < 2$, шунлыктан $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 < 0$. Ә бу очракта, ике уңай һәм бер тискәре сан тапкырчыгышы буларак, $f(x) < 0$. Димәк, $(1; 2)$ аралыгының барлык нокталарында $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлә.



Рәс. 8

3) $(-1; 1)$ аралыгыннан теләсә нинди нокта алабыз. Бу нокта саннар турысында −1 ноктасыннан уңдарак, 1 дән сулдарак һәм 2 ноктасыннан сулдарак ята (9 нчы рәсем). Димәк, $x > -1$, әмма



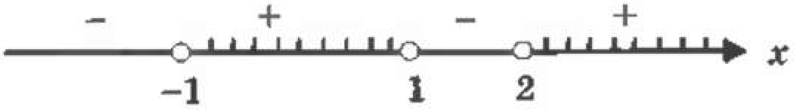
Рәс. 9

$x < 1$, $x < 2$ һәм шунлыктан $x + 1 > 0$, $x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$. Ә бу вакытта, ике тискәре сан һәм бер уңай сан тапкырчыгышы буларак, $f(x) < 0$. Шулай итеп, $(-1; 1)$ аралыгында $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә.

4) Ниһаять, $(-\infty; -1)$ ачык нурыннан теләсә кайсы ноктаны алабыз. Бу нокта саннар турысында -1, 1 һәм 2 нокталарының барысыннан да сулдарак ята (10 нчы рәсем). Һәм бу очракта, $x < -1$, әмма $x < 1$, $x < 2$ булганлыктан, $x + 1 > 0$, $x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$. Димәк, өч тискәре сан тапкырчыгышы буларак, $f(x) < 0$. Шулай булгач, $(-\infty; -1)$ аралыгында $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлә.

Рәс. 10

Нәтиҗә ясыйбыз. Бүленгән аралыкларда $f(x)$ аңлатмасының тамгалары 11 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә. Безне исә $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлгән аралыклар кызыксындыра; 11 нче рәсемдә алар штрихланган. Димәк, $f(x) > 0$ тигезсезлеге $(-1; 1)$ инвервалында яки $(2; +\infty)$ ачык нурында үтәлә.

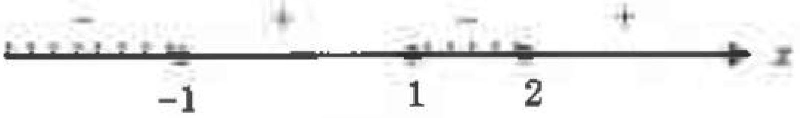


Рәс. 11

Җавап: $-1 < x < 1$; $x > 2$.

2 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә: $(x - 1)(x + 1)(x - 2) \leqslant 0$

Чишү. Алдагы мисалдагы кебек, кирәкле мәгълүматны 11 нче рәсемнән алабыз, тик 1 нче мисал белән чагыштырганда, ике аерма бар. Беренчедән, безне $f(x) < 0$ тигезсезлегенең x ның нинди кыйммәтләрендә үтәлүе кызыксындыра, шунлыктан $(-\infty; -1)$ һәм $(1; 2)$ аралыкларын сайлап алабыз. Икенчедән, безгә $f(x)=0$ тигезлеге үтәлгән нокталар да ярый. Әлеге -1, 1, 2 нокталарын рәсемдә кара түгәрәкләр белән билгелибез. 12 нче рәсемдә тигез-



Рәс. 12

сезлек чишелешләренең геометрик рәсеме бирелгән, һәм аннан аналитик язылышка күчү кыен түгел.

Җавап: $x \leqslant -1$; $1 \leqslant x \leqslant 2$.

3 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x - 6} < 0.$$

Чишү. Тигезсезлекнең сул ягындагы $f(x)$ алгебраик вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатабыз. Санаучыда

$$x^2 - x = x\,(x - 1)$$

табыла. Ваклаучыдагы $x^2 - 5x - 6$ квадрат өчбуынын тапкырлаучыларга таркату өчен, аның тамырларын табабыз. $x^2 - 5x - 6 = 0$ тигезләмәсеннән табабыз: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Димәк,

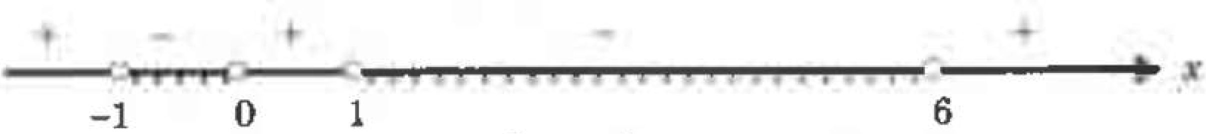
$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$$

(§ 1 та күрсәтелгәнчә, без квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркату формуласын кулландык: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$).

Шуның белән без тигезсезлекне мондый рәвешкә китердек:

$$\frac{x\,(x - 1)}{(x + 1)(x - 6)} < 0.$$

$\frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 6)}$ вакланмасының санаучысы 0 һәм 1 ноктыларында, ә ваклаучысы −1 һәм 6 ноктыларында 0 гә әйләнә. Бу нокталарны саннар турысында билгелибез (13 нче рәсем). Саннар турысы бу нокталар белән биш аралыкка бүленә. 1 нче мисалдагыча фикер йөртеп, һәр аралыкта $f(x)$ аңлатмасының тамгасы даими дигән нәтиҗәгә киләбез. Бүленгән аралыкларда $f(x)$ аңлатмасының тамгаларын 13 нче рәсемдә күрергә була.



Рәс. 13

Безне $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлгән аралыклар кызыксындыра. Моны без $(-1; 0)$ яки $(1; 6)$ интервалларында күрәбез.

Җавап: $-1 < x < 0$; $1 < x < 6$.

4 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} \geqslant 1.$$

Чишү. Кагыйдә буларак, рациональ тигезсезлекне чишкәндә, тигезсезлекнең уң ягында 0 санын калдырырга тырышалар:

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} - 1 \geqslant 0;$$

$$\frac{6x^2-5x+4-6x^2+x+2}{6x^2-x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{-4x+6}{6x^2-x-2} \geqslant 0.$$

Әгәр тигезсезлекнең уң ягында 0 саны гына булса, сул яктагы тигезсезлектә санаучының да, ваклаучының да өлкән коэффициентлары уңай сан булуы уңайрак. Ә безнең очракта вакланманың ваклаучысында бу шарт үтәлә (x^2 алдындагы өлкән коэффициент 6 га тигез – уңай сан), ә санаучыда өлкән коэффициент (x алдындагы сан) – 4 кә тигез (тискәре сан). Тигезсезлекнең ике ягын да -1 гә тапкырлап һәм тигезсезлек тамгасын капма-каршысына үзгәртеп, бирелгәненә тигезкөчле тигезсезлек табабыз:

$$\frac{4x-6}{6x^2-x-2} \leqslant 0.$$

Вакланманың санаучысын $4\left(x-\frac{3}{2}\right)$ рәвешенә үзгәртәбез. Ваклаучыдагы $6x^2-x-2$ квадрат өчбуынын тапкырлаучыларга таркату өчен, аның тамырларын табабыз. $6x^2-x-2=0$ тигезләмәсеннән $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Димәк,

$$6x^2-x-2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекне без түбәндәге рәвешкә китердек:

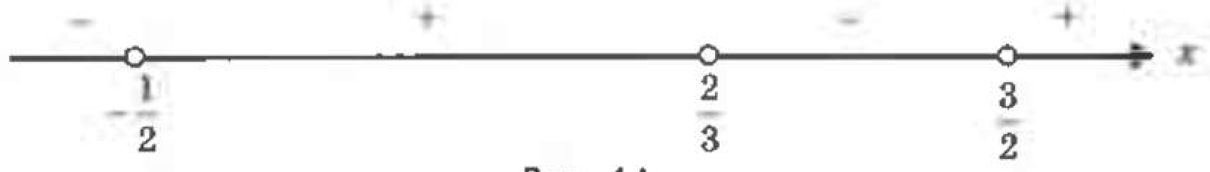
$$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)}{6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \text{ һәм аннан } \frac{x-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 0$$

(тигезсезлекнең ике ягын да уңай $\frac{4}{6}$ санына бүлдек).

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

аңлатмасын тикшерәбез.

Бу вакланманың санаучысы $\frac{3}{2}$ ноктасында, ә ваклаучысы $\frac{2}{3}$ һәм $-\frac{1}{2}$ нокталарында 0 гә әйләнә. Әлеге нокталарны саннар турысында билгелибез (14 нче рәсем); ул күрсәтелгән нокталар белән дүрт аралыкка бүленә һәм һәр аралыкта $f(x)$ аңлатмасы даими тамгасын саклый – бу тамгалар 14 нче рәсемдә күрсәтелгән. Безне исә $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлә торган аралыклар кызыксындыра; андый аралыклар штрих белән аерып күрсәтелгән (15 нче рәс.). Шарт буенча, $f(x) = 0$ тигезлеге үтәлә торган x нокталары да безгә кирәк. Мондый нокта берәү генә, бу — $x = \frac{3}{2}$ ноктасы, чөнки шул кыйммәттә генә санаучы 0 гә әйләнә. 15 нче рәсемдә $x = \frac{3}{2}$ ноктасы түгәрәк белән билгеләнгән. Шулай итеп, 15 нче рәсемдә бирелгән



Рәс. 14

Рәс. 15

тигезсезлекнең геометрик рәсеме китерелгән, ә инде аннан аналитик язылышка күчү кыен түгел.

Җавап: $x < -\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} < x \leqslant \frac{3}{2}$.

Тикшерелгән мисалларда без бирелгән тигезсезлекне аңа тигезкөчле булган $f(x) > 0$ яки $f(x) < 0$ рәвешендәге тигезсезлек килеп чыгарлык итеп үзгәрттек, биредә

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}.$$

Аннан соң x күчәрендә (саннар турысында) a, b, c, d нокталарын билгеләдек һәм аерып алынган аралыкларда $f(x)$ аңлатмасының тамгаларын ачыкладык. Үңдагы иң кырый аралыкта $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлүен, ә аннан соң (a, b, c, d саннары парлап төрле булган очракларда) $f(x)$ аңлатмасының тамгалары чиратлашуын күрдек (16, *а* рәсем). Бу чиратлашуны уңнан сулга һәм өстән аска таба үткәрелгән дулкынсыман кәкре сызык белән күрсәтү уңай (16, *б* рәсем). Әлеге кәкре (аны *тамгалар кәкресе* дип тә йөртәләр) x күчәреннән өстә урнашкан аралыкларда $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә, ә бу кәкре x күчәреннән аста урнашса, $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлә.

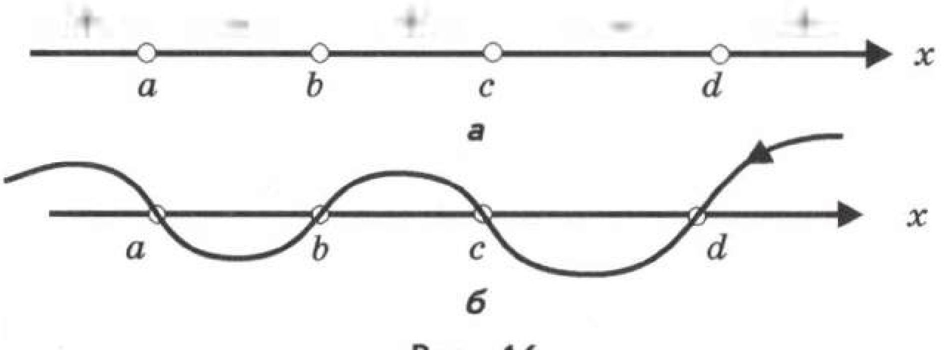
Санаучыда һәм ваклаучыдагы тапкырлаучыларның саны теләсә никадәр булуын да искәртик (икесендә дә икешәр генә түгел).

5 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{x^3-7x}{(2x+3)(3x-8)} > 0.$$

Чишү. Үзгәртүләр ясап табабыз:

$$\frac{x(x^2-7)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{8}{3}\right)} > 0;$$



Рәс. 16

$$\frac{x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0$$

(алдагы тигезсезлекнең ике ягын да уңай 6 санына тапкырладык).

Интерваллар алымын куллану өчен, саннар турысында 0, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ саннарын (бу нокталарда вакланманың санаучысы 0 гә әйләнә) һәм $-\frac{3}{2}$, $\frac{8}{3}$ нокталарын (бу нокталарда ваклаучы 0 гә әйләнә) билгелибез. Гадәттә нокталарны схематик төстә генә билгелиләр, аларның урнашу тәртибе генә исәпкә алына (кайсы уңдарак, кайсы сулдарак), масштабка әллә ни әһәмият бирелми.

Билгеле инде, $-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0$. Калькулятор булмаганда, $\sqrt{7}$ һәм $\frac{8}{3}$ саннары гына аптырашта калдырырга мөмкин. Аларның квадратларын карап карарбыз.

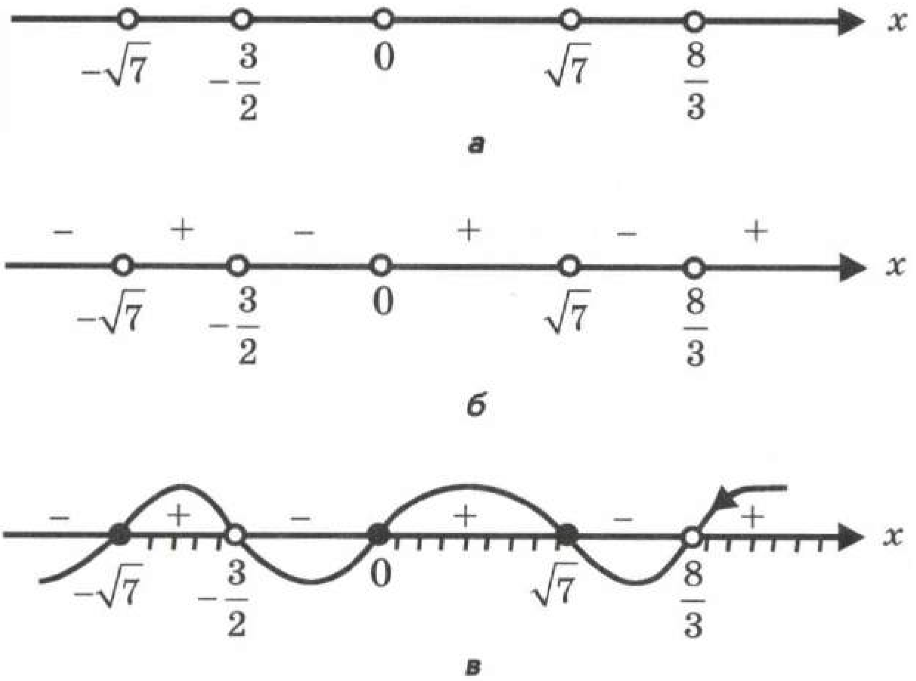
Табабыз: $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$, $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$. Димәк, $\left(\sqrt{7}\right)^2 < \left(\frac{8}{3}\right)^2$, шунлыктан $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Шулай итеп, $-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0 < \sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Күрсәтелгән биш ноктаны бирелгән тәртиптә саннар турысында билгелибез (17, *а* рәсем). Табылган аралыкларда

$$f(x) = \frac{x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)}$$

аңлатмасының тамгаларын куеп чыгабыз: иң уң аралыкка «+» тамгасы һәм аннан соң тамгалар чиратлаша (17, *б* рәсем). Тамгалар кәкресен сызып, безгә кирәкле $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә торган аралыкларны штрих белән билгеләп чыгабыз (17, *в* рәсем). Биредә сүзнең *катгый булмаган тигезсезлек*, $f(x) \geqslant 0$ турында барганын онытмыйк, димәк, безне $f(x)$ аңлатмасы нульгә әйләнә



Рәс. 17

торган нокталар да кызыксындыра. Болар $f(x)$ вакланмасының санаучысы тамырлары, ягъни 0, $\sqrt{7}$ һәм $-\sqrt{7}$ нокталары; аларны 17 нче рәсемдә кара нокталар белән билгелибез һәм, билгеле инде, җавапка да кертәбез. Хәзер инде 17, *в* рәсеме бирелгән тигезсезлек чишелешенең тулы геометрик рәсемен бирә.

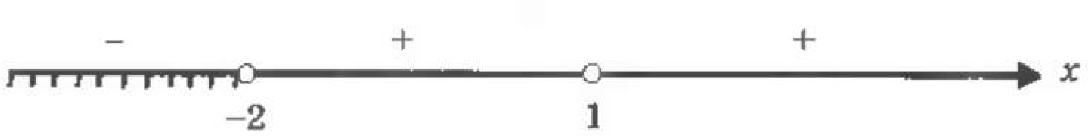
Җавап: $-\sqrt{7} \leqslant x < -\frac{3}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$; $x > \frac{8}{3}$.

Тагын шунысы бар, рациональ тигезсезлекләр арасында интерваллар алымын аеруча саклык белән кулланырга кирәклеләре дә була. Моны хәзерге мисалларда карап үтәрбез.

6 нчы мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$(x-1)^2(x+2) < 0.$$

Чишү. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ аңлатмасын тикшерәбез, саннар турысында 1 һәм -2 нокталарын билгелибез (18 нче рәсем) һәм килеп чыккан өч аралыкта $f(x)$ ның тамгаларын билгелибез.



Рәс. 18

Әгәр $x \in (1; +\infty)$ икән, $x > 1$, $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 > 0$.

Димәк, $(x-1)^2(x+2) > 0$. Шулай булгач, ачык $(1; +\infty)$ нурында $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә.

Әгәр $x \in (-2; 1)$, ягъни $-2 < x < 1$ икән, $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 > 0$. Димәк, $(x-1)^2(x+2) > 0$. Шулай итеп, $(-2; 1)$ интервалында $f(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә.

Әгәр $x \in (-\infty; -2)$, ягъни $x < -2$ икән, $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 < 0$. Димәк, $(x-1)^2(x+2) < 0$. Шулай итеп, $(-\infty; -2)$ ачык нурында $f(x) < 0$ тигезсезлеге үтәлә.

$f(x)$ аңлатмасының тамгалары 18 нче рәсемдә күрсәтелгән. $f(x) < 0$ тигезсезлеге $(-\infty; -2)$ ачык нурында үтәлә.

Җавап: $x < -2$.

1 нче искәрмә. 6 нчы мисалда без элегрәк игътибар иткән тамгалар чиратлашу булмады, шунлыктан тамгалар кәкресен сызып тормадык. Гадәти хәлнең бозылуы $f(x)$ аңлатмасында $(x-1)^2$ тапкырлаучысы булу белән аңлатыла. Шунлыктан, әгәр $f(x)$ алгебраик вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатканнан соң, $(x-a)^n$, биредә $n = 2, 3, 4, \ldots$, рәвешендәге тапкырлаучы табыла икән, тамгалар кәкресен кулланмаска киңәш итәбез, $f(x)$ аңлатмасының тамгасын, 6 нчы мисалдагы кебек, һәр аралыкта аерым билгеләгез.

2 нче искәрмә. Әгәр 6 нчы мисалда тигезсезлек катгый булмаса, ягъни $(x-1)^2(x+2) \leqslant 0$ рәвешендә булса, геометрик рәсеме үзгәрер иде: 1 һәм -2 нокталарын буяп алырга һәм аларны җавапка да кертергә кирәк булачак. тигезсезлекнең чишелеше ул вакытта $x \leqslant -2$; $x = 1$ рәвешен алыр иде.

Рәс. 19

7 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә:

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} < \frac{3}{7 + x}.$$

Чишү. Тигезсезлекне түбәндәге рәвешкә үзгәртәбез:

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} - \frac{3}{7 + x} < 0$$

һәм табылган тигезсезлекнең сул ягы белән эшлибез:

$$\frac{19-x^2-4x}{49-x^2}-\frac{3}{7+x}=\frac{19-x^2-4x}{(7-x)(7+x)}-\frac{3^{(7-x}}{7+x}=$$

$$=\frac{19-x^2-4x-3(7-x)}{(7-x)(7+x)}=\frac{-x^2-x-2}{(7-x)(7+x)}=\frac{x^2+x+2}{(x-7)(x+7)}$$

(вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын −1 гә тапкырладык, бу – бердәй рәвешүзгәртү).

Шулай итеп, мәсьәлә түбәндәге тигезсезлекне чишүгә кайтып кала:

$$\frac{x^2+x+2}{(x-7)(x+7)}<0.$$

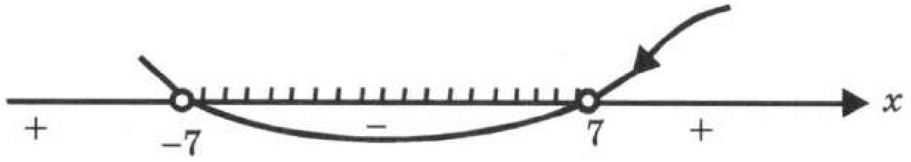
Тигезсезлекнең сул ягындагы алгебраик вакланманың санаучысын, ягъни x^2+x+2 аңлатмасын тапкырлаучыларга таркатып карыйк. Тик бу квадрат өчбуынының дискриминанты тискәре: $D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7$. Димәк, өчбуынның тамырлары юк һәм $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ формуласын биредә кулланып булмый. Нәрсә эшләргә?

Бу сорауга җавапны § 1 тагы теорема бирә: әгәр ax^2+bx+c квадрат өчбуынының дискриминанты тискәре һәм өлкән коэффициенты уңай икән, өчбуын x ның барлык кыйммәтләрендә дә *уңай була*. Ә димәк, тигезсезлекнең ике ягын да, аның тамгасын үзгәрмичә (к.: § 1, 2 нче кагыйдә*), бу өчбуынга бүлергә мөмкин. Табабыз:

$$\frac{1}{(x-7)(x+7)}<0.$$

Интерваллар алымын кулланып (20 нче рәсем), соңгы (димәк, бирелгәнен дә) тигезсезлекнең чишелеше сыйфатында (−7, 7) интервалын табабыз.

Җавап: $-7<x<7$.



Рәс. 20

8 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә: $\frac{3x^3 - 2x^2 - 2x}{x} < 0.$

Чишү. Табабыз: $\frac{x(3x^2 - 2x - 2)}{x} < 0$, ягъни $3x^2 - 2x - 2 < 0$ ($x \neq 0$ шарты белән). $3x^2 - 2x - 2 = 0$ квадрат тигезләмәсенең чишешләрен табабыз:

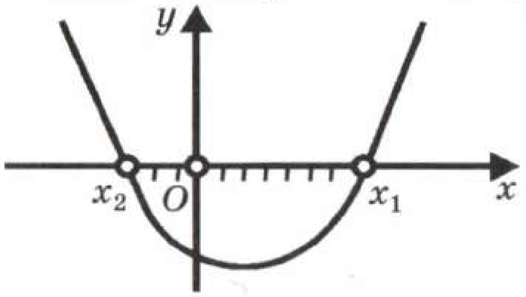
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - (-2) \cdot 3}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3};$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}; \; x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}.$$

Билгеле инде,

$$3x^2 - 2x - 2 = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

формуласын кулланып, бирелгән тигезсезлекне интерваллар алымы ярдәмендә чишәргә мөмкин. Ләкин квадрат тигезсезлекләр чишүнең тикшерелгән һәм ышанычлы юлы бар, без аны узган параграфта искә төшердек. Моның өчен x күчәрендә x_1 һәм x_2 нокталарын билгелибез ($x_2 < x_1$ икәнен исәпкә алып), схематик рәвештә $y = 3x^2 - 2x - 2$ параболасын төзибез, иң мөһиме – бу парабола тармакларының өскә таба юнәлүен исәпкә алу кирәк (21 нче рәсем). График x күчәреннән астарак яткан аралыкны сайлап алабыз, бу $(x_2; x_1)$ интервалы. Алдарак $x \neq 0$ дип билгеләгән идек, $x = 0$ ноктасын «чокып алырга» кирәк. Хәзер 21 нче рәсем бирелгән тигезсезлекне чишүнең тулы геометрик рәсемен бирә.



Рәс. 21

Җавап: $\frac{1 - \sqrt{7}}{3} < x < 0; \; 0 < x < \frac{1 + \sqrt{7}}{3}.$

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Тигезсезлекләрне чишүнең интерваллар алымы нидән гыйбарәт икәнен аңлатыгыз һәм аны түбәндәге тигезсезлекләрне чишү өчен кулланыгыз:

а) $x(x + 1)(x - 2) < 0$; б) $(x - 1)(x - 3)(x + 4) \geqslant 0$.

2. –3, 0, 1, 5 саннарының кайсылары $\frac{(x - 1)(x + 3)}{x(x - 5)} \leqslant 0$

тигезсезлегенең чишелеше була, ә кайсылары булмый? Бу тигезсезлекне интерваллар алымы белән чишегез.

3. $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$ тигезсезлегенең чишелеше түбәндәгечә дөрес буламы: $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$ булганлыктан, кире саннарга күчеп, $x \geqslant 3$ не табабыз? $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$ тигезсезлеген интерваллар алымын кулланып чишегез. Табылган чишелешне алда алынган $x \geqslant 3$ чишелеше белән чагыштырыгыз. Ни өчен төрле нәтиҗәләр килеп чыга?

§ 3. КҮПЛЕКЛӘР ҺӘМ АЛАР БЕЛӘН ГАМӘЛЛӘР

1. Күплек төшенчәсе

Күренекле итальян физигы, механик, астроном һәм математик Галилео Галилейның (1564–1642) «Табигатьнең Бөек китабы математика теле белән язылган», – дигән канатлы сүзләре бар. Кешелекнең күп гасырлык үсеш тарихында кешеләрнең табигать законнары турындагы белемнәре генә түгел, төрле чорларда бу законнар язылган тел – математика теле – үзе дә зур үзгәрешләр кичерә.

Мәсәлән, Урта Азия галиме Мөхәммәд ибне Муса әл-Харәзминың (безнең эраның IX гасыры) «Китаб әл-җәбр әл-мөкабәлә» хезмәтеннән бер өзек («алгебра» атамасын шушы хезмәтендә кертә):

«Квадратлар һәм санга тигез булган тамырларга килгәндә, әйтик, сан квадрат һәм аның ун тамыры 39 дирһәмгә тигез дип әйтәсең икән, бу ниндидер квадратка аның ун тамырын өстәгәч, 39 килеп чыга дигән сүз. Кагыйдә шундый: тамырлар санын урталай бүл, бу мәсьәләдә биш килеп чыга, аны үзенә тигезгә тапкырла, 25 булыр. Аны 39 га куш, 64 булыр. Аннан тамыр ал, 8 булыр, һәм аннан тамырлар санының яртысын, ягъни 5 не ал, 3 калыр: бу квадратның син эзләгән тамыры булыр, ә квадрат 9 булыр...»

Хәзерге заман укучысы бик авырлык белән генә биредә сүзнең $x^2 + 10x = 39$ квадрат тигезләмәсен чишү һәм аның: $x = -5 + \sqrt{25 + 39} = -5 + \sqrt{64} = 3$ ($x = -13$ тамыры бөтенләй каралмый да) тамырын табу турында барганын аңлый ала.

Хәзерге математика теле күп тапкырлар кыскарак һәм беренче чиратта табигый сөйләм телен махсус хәрефле һәм символлы аңлатмалар белән алыштыра. Ул тагын да формаль һәм унификацияләнгән, ягъни бер типтагы күп кенә очракларны тикшерү мөмкинлеген бирә. Әле тагын да формальрәк, мәсәлән, программалаштыру телләре бар. Аларда инде математика теле каттый һәм алда сурәтләнгән кагыйдәләр буенча компьютер теленә күчерелә.

Бу параграфта без инде менә 100 елдан артык заманча математика теленең нигезен тәшкил итеп килгән *күплекләр теориясе теленең* иң гади төшенчәләрен һәм билгеләнешләрен карарбыз.

Күплек элементлардан тора. Әгәр дә элементлар күп булмаса, аларны ниндидер тәртипкә салып чыгу да уңай. Санап кителгән элементларның ниндидер күплеккә берләшкәнен онытмас өчен, аларны фигуралы җәяләр эчендә { , } язалар. Менә кайбер мисаллар:

Күплекне сүзләр белән сурәтләү	Күплекне элементлап сурәтләү	Күплекне аның элементларын санап чыгу юлы белән бирү
Унарлы санау системасы цифрлары	Күплек 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрларыннан тора	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Рус алфавитының сузык хәрефләре	Күплек *А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я* хәрефләреннән тора	{*А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я*}
$x^2 + 10x = 39$ тигезләмәсенең тамырлары	Күплек 3 һәм −13 саннарыннан тора	{3, −13}
Россия Федерациясенең беренче, икенче һәм өченче Президентлары	Күплек өч кешедән– Ельцин, Путин, Медведевтан тора	{Ельцин, Путин, Медведев}

Күплекнең элементларын теләсә нинди тәртиптә санап чыгарга мөмкин. Элементларны санау тәртибен үзгәртүдән күплек үзе үзгәрми. Мәсәлән, {*А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я*} һәм {*Я, И, Ы, Э, Ю, Ё, О, У, А, Е*} – икесе дә рус алфавитының сузык хәрефләреннән торучы бер үк күплек.

1 нче искәрмә. Әгәр күплек саннардан торса, аларны санап чыкканда өтер аша түгел, ә нокталы өтер «;» аша язу уңайрак. Мәсәлән, $\{-13;\ 3\}$ язылышы күплекнең -13 һәм 3 саннарыннан торуын ачык күрсәтә, ә $\{13,\ 3\}$ язылышында өтернең мәгънәсен икенче төрле аңлап, күплек бер генә $-13{,}3$ саныннан тора дип уйларга мөмкин.

Без күбесенчә *санлы* күплекләр, ягъни элементлары булып саннар торган күплекләр белән эш итәчәкбез. Санлы күплекләр өчен табигый санау тәртибе – кечерәк саннан зурысына таба санау уңайрак.

1 нче мисал. A күплеге $x^3 + x^2 - 6x$ тигезләмәсенең барлык тамырларыннан тора.

а) Бу тигезләмәне чишәргә.

б) A күплеген аның элементларын санап чыгу юлы белән бирергә.

в) A күплеге элементларын санап чыгуның барлык юлларын язарга.

г) A күплеге элементларын санауның ничә юлы бар?

Чишү: а) $x^3 + x^2 - 6x = 0;$

$$x(x^2 + x - 6) = 0;$$

$$x = 0 \text{ яки } x^2 + x - 6 = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2.$$

б) Тамырларны үсә бару тәртибендә санап чыгабыз: $A = \{-3;\ 0;\ 2\}$.

в) Безгә төрле өч санны төрле өч урынга куярга кирәк. Беренче урында -3 торса, калган икесен калган ике урынга куюның ике варианты бар: $\{-3;\ 0;\ 2\}$ һәм $\{-3;\ 2;\ 0\}$. Беренче урында 0 торганда да, ике вариант бар: $\{0;\ 2;\ -3\}$ һәм $\{0;\ -3;\ 2\}$. Әгәр беренче урында 2 торса, шулай ук ике вариант: $\{2;\ -3;\ 0\}$ һәм $\{2;\ 0;\ -3\}$.

Шулай итеп, A күплеген язуның 6 варианты бар:

$\{-3,\ 0,\ 2\}$, $\{-3,\ 2,\ 0\}$, $\{0,\ -3,\ 2\}$, $\{0,\ 2,\ -3\}$, $\{2,\ -3,\ 0\}$, $\{2,\ 0,\ -3\}$.

г) Санап чыгуның барлык вариантлары в) пунктында табылды. Аларның саны 6. ◙

Әйтик, 1 нче мисалда сүз $x^3 + x^2 - 6x = 0$ тигезләмәсе турында түгел, ә $x^{2008} + 2008 = 0$ тигезләмәсе турында бара, ди. Теләсә кайсы x өчен $x^{2008} + 2008 \geqslant 2008 > 0$ булганлыктан,

а) пунктында «тамырлары юк» дип җавап бирергә кирәк. Ә инде б) пунктында ничек? Санарга әйбер юк бит. Мондый хәлдән чыгу өчен, математикада махсус ∅ тамгаланышын кертәннәр. *Буш күплекне,* ягъни бер генә элементы да булмаган күплекне шулай билгелиләр. ∅ тамгасы янына фигуралы җәяләр куелмый, чөнки булмаган элементларны санап чыгу мөмкин түгел.

Әгәр күплекнең элементлары шактый күп (мәсәлән, берничә дистә, йөз һ. б.) яки күплек чиксез (мәсәлән, барлык натураль саннар күплеге яки барлык бөтен саннар күплеге) икән, бу элементларны шулай ук санап чыгып булмый. Мондый күплекләрне төрле юллар белән бирәләр. Менә аларның кайберләре.

	Күплек	Күплекне сүзләр белән сурәтләү
1	$\{10, 15, 20, ..., 90, 95\}$	5 кә кабатлы булган барлык икеурынлы натураль саннар күплеге
2	$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$	Барлык натураль саннарның квадратлары күплеге
3	N	Натураль саннар күплеге
4	Q	Рациональ саннар күплеге
5	$\{x \mid 2 < x < 7\}$	2 дән зуррак һәм 7 дән кечерәк булган барлык саннар күплеге
6	$(2; 7)$	2 дән зуррак һәм 7 дән кечерәк булган барлык саннар күплеге

1 һәм 2 очракларында аларның берничә элементын күрү белән, без бу күплекнең ничек төзелүен *аңлап алабыз*. Әлеге юл «... һәм башка шулай» дигән сүзләрне кулланып языла.

Кайбер санлы күплекләр математиканың төрле бүлекләрендә шулкадәр күп очрый, хәтта алар өчен махсус тамгаланыш та кертелгән. 3 һәм 4 очракларында нәкъ менә шуларны күрәбез,

болардан тыш бөтен саннар күплеге өчен $\boldsymbol{Z}$ һәм реаль саннар күплеге өчен $\boldsymbol{R}$ тамгаларын да кулланалар.

5 очрагында күплек аның *характерлы үзлеге* ярдәмендә бирелгән. Бу да күплекләрне бирүнең иң киң таралган юлларының берсе. Фигуралы җәяләр эчендәге « | » символы элемент белән аның билгесен аерып тора. $\{x \mid 2 < x < 7\}$ язылышын мәнә шулай укырга була: $2 < x < 7$ булган барлык x лар күплеге.

Ниһаять, 6 очрагында, 3 һәм 4 очракларындагы кебек, күплек махсус тамгаланыш ярдәмендә бирелгән. Биредә без санлы күплекләрнең иң киң таралган үрнәген – интервал белән бирелешне күрәбез. Интервал белән беррәттән еш кына башка төрле *санлы аралыклар* да очрый. Мәсәлән, $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a; b]$ – a һәм b очлары да кергән кисемтә; $\{x \mid x < b\} = (-\infty; b)$ – очы b ноктасында булган ачык нур.

2 нче мисал. Күплекнең бирелеше буенча аны сүзләр белән сурәтләргә:

а) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$; б) $\{2, 4, 6, ..., 18, 20\}$; в) $\{12, 22, 32, ..., 92\}$;

г) $\{1, 8, 27, 64, 125, ...\}$.

Чишү. Бер үк күплекне сүзләр ярдәмендә төрлечә сурәтләргә мөмкин. Чөнки сөйләм телендә бер үк фикерне төрлечә белдерергә була. Шунлыктан җәя эчендә җавапларның башка вариантларын да бирербез.

а) Барлык җөп цифрлар күплеге (1, 3, 5, 7, 9 цифрларыннан башка барлык цифрлар);

б) 21 дән кечерәк булган барлык җөп натураль саннар күплеге (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 саннарын 2 гә тапкырлап табылган барлык саннар);

в) 2 цифрына беткән барлык икеурынлы саннар күплеге $10x + 2$ рәвешендәге барлык саннар, биредә x – 0 гә тигез булмаган цифр);

г) барлык натураль саннарның кублары күплеге (x аргументының натураль кыйммәтләре өчен $y = x^3$ функциясенең кыйммәтләре күплеге). ■

3 нче мисал. Тигезсезлекне чишәргә, бирелгән санлы күплекне санлы аралык рәвешендә язарга:

а) $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$; в) $\left\{x \left| \frac{1}{x} > 1\right.\right\}$;

б) $\left\{x \left| \frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{5} > 2x - \frac{1}{15}\right.\right\}$; г) $\{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$.

Чишү. а) $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$ язылышы $x^2 + 1 > 0$ булган барлык x лар күплеген табарга кирәген күрсәтә. Бу тигезсезлек барлык реаль саннар өчен дә дөрес.

Җавап: а) барлык саннар турысы; символик язылышы: $(-\infty; +\infty)$, яки $\boldsymbol{R}$.

б) $\frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{5} > 2x - \frac{1}{15}$

тигезсезлеге үтәлә торган барлык x ларны табарга, ягъни тигезсезлекне чишәргә кирәк. Аны инде без § 1 та чиштек (1 нче мисал), җавап $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$ иде.

в) $\frac{1}{x} > 1$ тигезсезлегенең чишелешләр күплеген (чишелешен дияргә дә мөмкин) табарга кирәк.

Табабыз:

$$\frac{1}{x} > 1;\ \frac{1}{x} - 1 > 0;\ \frac{1 - x}{x} > 0;\ \frac{x - 1}{x} < 0.$$

Интерваллар алымын кулланып (22 нче рәсем), тигезсезлекнең чишелеше сыйфатында (0; 1) интервалын табабыз.

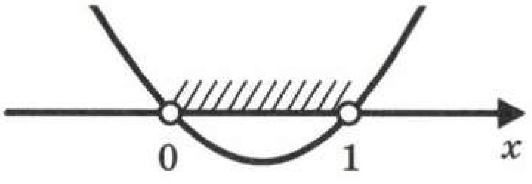
г) $35x^2 \leqslant 24x + 35$; $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$. $35x^2 - 24x - 35$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 35^2}}{35} = \frac{12 \pm \sqrt{1369}}{35} = \frac{12 \pm 37}{35};$$

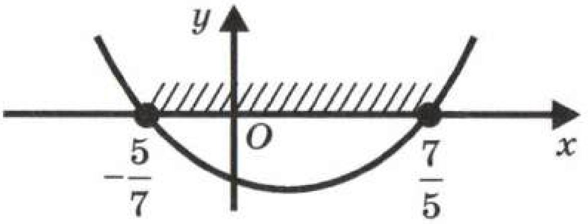
$$x_1 = \frac{-25}{35} = -\frac{5}{7},\ x_2 = \frac{49}{35} = \frac{7}{5}.$$

$y = 35x^2 - 24x - 35$ параболасының тармаклары өскә юнәлгән. Шуңа күрә $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$ тигезсезлегенең чишелешләре күплеге $x_1 = -\frac{5}{7}$ һәм $x_2 = \frac{7}{5}$ тамырлары арасындагы кисемтә (23 нче рәсем).

Җавап: а) $\boldsymbol{R}$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$; в) $(0; 1)$; г) $\left[-\frac{5}{7}; \frac{7}{5}\right]$.



Рәс. 22



Рәс. 23

Сүзләр ярдәмендә «x элементы A күплегенә керә» яки «x A күплегенең элементы булып тора» дип әйтү чагыштырмача озын һәм конкрет мәсьәләләрнең чишелешен язганда бик үк уңайлы түгел. Математикада бу аңлатманы кыскача $x \in A$ дип язалар (без инде әлеге тамганы кулланган идек). $\in$ *керү тамгасын* кирегә борылган «э» хәрефе, ягъни «элемент» сүзенең беренче хәрефе дип истә калдыру уңайрак. Керү тамгасы $\in$ белән беррәттән *инкарь итү* тамгасы — $\notin$ тамгасы да кулланыла. $x \notin A$ язылышы – x элементы A күплегенә керми дигәнне аңлата. Бу тамгаларны куллануга мисаллар китерик:

$3 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, ә $13 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

У $\in$ {*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*}, ләкин Ь $\notin$ {*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*};

$2007 \in \boldsymbol{N}$, ә инде $200{,}7 \notin \boldsymbol{N}$;

$0 \in \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$, ә $2 \notin \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$.

Әгәр $x \in A$ дөрес булмаса, $x \notin A$ дөрес була. Һәм киресенчә, $x \in A$ дөрес булса, $x \notin A$ дөрес булмый.

4 нче мисал. Түбәндәгеләр дөресме:

а) $0 \in \boldsymbol{N}$; б) $0 \in \boldsymbol{Z}$; в) $1 \in \{x \mid x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0\}$;

г) $1 \in \left\{x \middle| \sqrt{x^2 - 2} > 30\right\}$?

Чишү. а) Юк, 0 натураль сан түгел. Димәк, $0 \notin \boldsymbol{N}$.

б) Әйе. Бөтен саннар күплеген **Z** хәрефе белән атау «Zero» – нуль сүзенең беренче хәрефеннән алынган.

в) Әйе. $x = 1$ не $x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0$ тигезсезлегенә куеп карыйбыз. $-1 < 0$ булган дөрес тигезсезлек табабыз.

г) Юк. $x = 1$ булганда, $\sqrt{x^2 - 2} > 30$ тигезсезлегенең сул ягы билгеләнми. ◙

2 нче искәрмә. 4 нче мисалда в) һәм г) пунктлары A күплеге характерлы үзлеге белән бирелгән очракта, $x \in A$ расламасының дөреслеген ничек тикшерергә кирәклекне күрсәтәләр. Бары тик әлеге x саны өчен бу үзлек дөресме икәнен генә тикшерергә кирәк. Җавап «әйе» булса, $x \in A$ дигән сүз, ә «юк» җавабы $x \notin A$ икәнен күрсәтә.

2. Аскүплек

Бирелгән A күплеген төзүче элементларны барысын берьюлы бергә генә түгел, ә төрле комбинацияләрдә төркемләп тә берләштерергә мөмкин. Шулай итеп бирелгән күплекнең төрле *аскүплекләрен* ясарга була.

Мәсәлән, әгәр күплек □ , ✦, ● элементларыннан тора икән, икешәр элементтан торучы өч аскүплек төзеп була. Болар {□ , ✦}, {□ , ●} һәм {✦, ●}. Катлаулырак мисал карап китик.

5 нче мисал. Футбол командасы составында кырга ике һөҗүмче чыгарга тиеш, ә тренерның бу урыннарга дүрт кандидаты x, y, z һәм t бар.

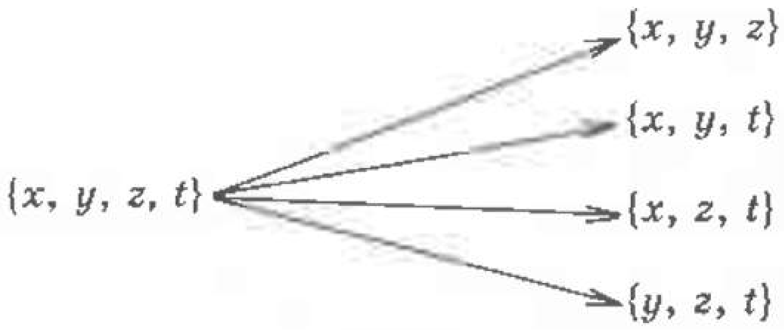
а) Тренерга ничә варианттан сайлап алырга туры килә?

б) Әгәр x уенчысы y белән бергә уйный алмаса, а) җавабы нинди булыр?

в) Әгәр z уенчысы бары тик t белән бергә генә уйный алса, а) җавабы нинди булыр?

г) Әгәр кырга өч һөҗүмче чыгарга тиеш булса, а) җавабы ничек үзгәрер?

Чишү. Башта без бирелгән күплекләр, элементлар, аскүплекләрнең нигә кирәген аңларга тиешбез. $A = \{x, y, z, t\}$ – бу күплек, тренерга аннан ике һөҗүмчене, ягъни ике элементны сайлап алырга кирәк. Димәк, мәсьәлә бирелгән $A = \{x, y, z, t\}$ күплегеннән ике элементлы аскүплекләр сайлап алуга кайтып кала.



Рәс. 24

а) x уенчысы катнашкан вариантларны санап чыгабыз. Болар $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, t\}$. Ә инде y уенчысы өчен $\{x, y\}$ варианты инде исәпкә керде, $\{y, z\}$ һәм $\{y, t\}$ вариантлары калды. Калган z уенчысы өчен $\{x, z\}$ һәм $\{y, z\}$ вариантлары булды, бары бер $\{z, t\}$ варианты гына калды. t уенчысы өчен уенга чыгуның барлык вариантлары да саналды. Шулай итеп, тренерга алты варианттан: $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, t\}$, $\{y, z\}$, $\{y, t\}$, $\{z, t\}$ сайлап алырга туры киләчәк.

б) Санап үтелгән вариантлардан $\{x, y\}$ ны алып ташларга кирәк. Биш вариант кала.

в) Санап үтелгәннәрдән $\{x, z\}$ һәм $\{y, z\}$ вариантларын алып ташларга кирәк. Дүрт вариант кала.

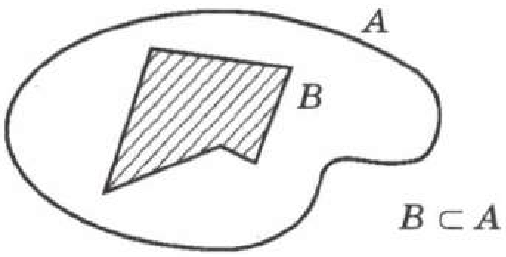
г) Бу очракта бирелгән $A = \{x, y, z, t\}$ күплегенең барлык өч аскүплекләрен санап чыгарга кирәк. Менә алар: $\{x, y, z\}$ (t керми), $\{x, y, t\}$ (z керми), $\{x, z, t\}$ (y керми), $\{y, z, t\}$ (x керми). Барысы дүрт вариант (24 нче рәсем).

Җавап: а) 6; б) 5; в) 4; г) 4.

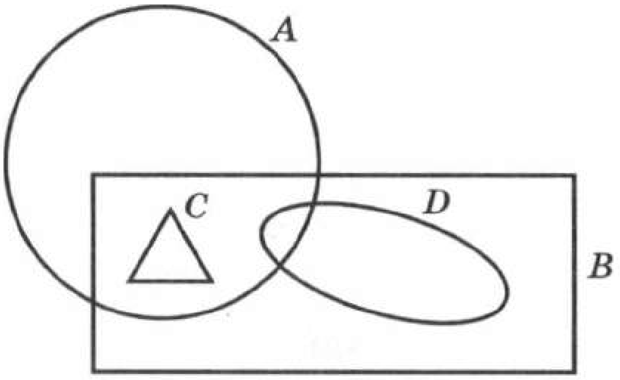
Ә дүрт элементлы күплектә барысы ничә аскүплек бар? 5 нче мисалдагы кебек фикер йөртербез. Табылганнарны таблицага язып барабыз.

	Һөҗүмчеләр саны				
	0	1	2	3	4
Һөҗүмчеләр составының вариантлары	Һөҗүмчеләр юк	$\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{t\}$	$\{x, y\}$, $\{x, z\}$ $\{x, t\}$, $\{y, z\}$ $\{y, t\}$, $\{z, t\}$	$\{x, y, z\}$, $\{x, y, t\}$, $\{x, z, t\}$, $\{y, z, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
Вариантлар саны	1	4	6	4	1

Шулай итеп, дүрт элементлы күплектә 4 бер элементлы аскүплек, 6 ике элементлы аскүплек, 4 өч элементлы аскүплек,



Рәс. 25



Рәс. 26

1 дүрт элементлы аскүплек һәм бер элементы да булмаган аскүплек, ягъни буш күплек бар. Барысы 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 төрле аскүплек килеп чыкты.

Аскүплекнең гомуми рәвештәге билгеләмәсе болай әйтелә:

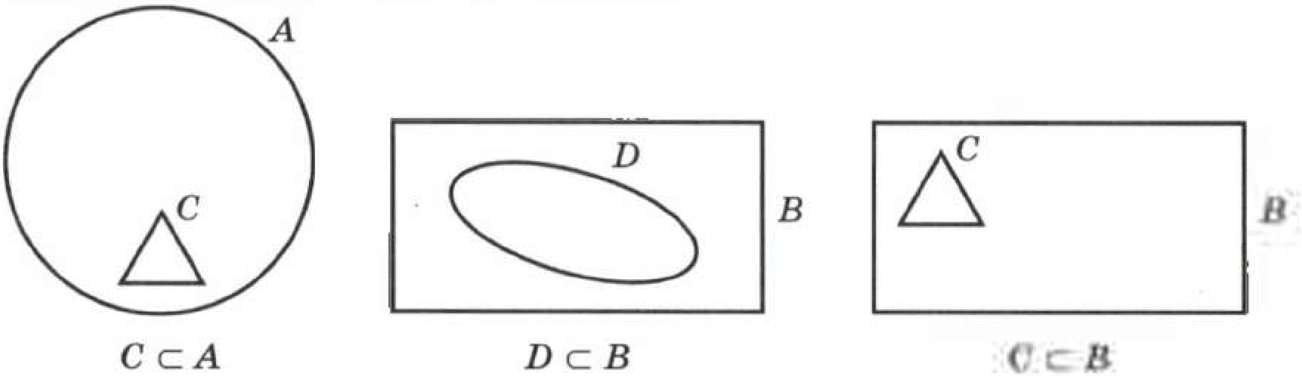
1 нче билгеләмә. Һәр B күплегенең һәр элементы A күплеге элементы булып торса, B күплеген A күплегенең **аскүплеге** дип атыйлар. $B \subset A$ дип тамгалана. «$\subset$» тамгасы **керү** тамгасы була.

Әгәр A һәм B күплекләре яссы фигуралар (дөресрәге A һәм B фигураларын төзүче нокталар күплекләре) булып торса, $B \subset A$ язылышы B фигурасы тулысы белән A фигурасында ята дигәнне аңлата (25 нче рәсем).

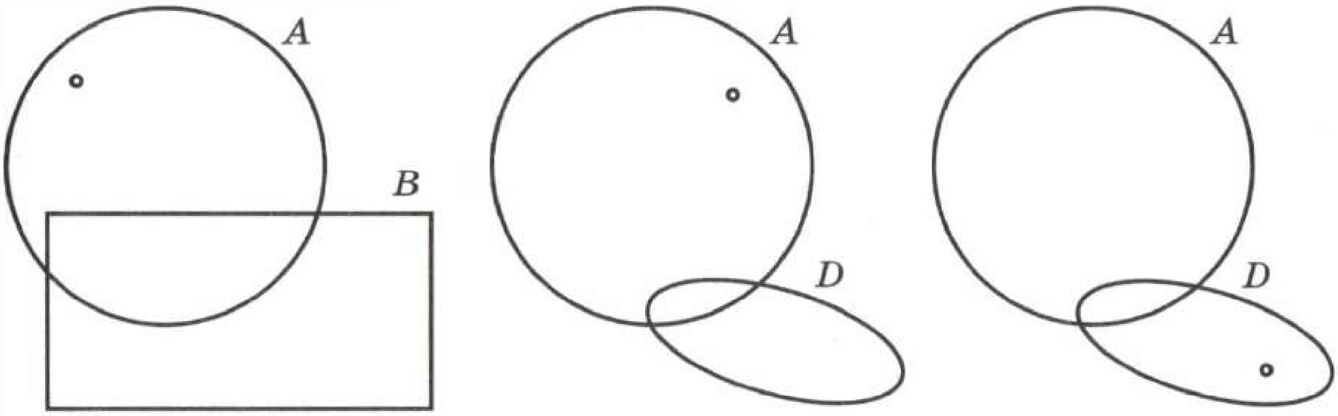
6 нчы мисал. 26 нчы рәсемдә дүрт яссы фигура: A түгәрәге, B турыпочмаклыгы, C өчпочмагы һәм яссылыкның овал белән чикләнгән D өлеше сурәтләнгән. $A \subset B$, $C \subset A$, $D \subset B$, $A \subset D$, $C \subset B$, $D \subset A$ язылышларының кайсылары:

а) дөрес; б) дөрес түгел?

Чишү. а) $C \subset A$, $D \subset B$, $C \subset B$ язылышлары дөрес. Без аларны парлап күрсәтәбез (27 нче рәсем).



Рәс. 27



$A \subset B$ дөрес түгел $A \subset D$ дөрес түгел $D \subset A$ дөрес түгел

Рәс. 28

б) $A \subset B$, $A \subset D$, $D \subset A$ – дөрес түгел. Аларны шулай ук парлап күрсәтәбез һәм һәр очракта ниндидер ноктаның кертелү язылышының сул ягында ятуын, ә уң ягында ятмавын аерым билгелибез (рәс. 28).■

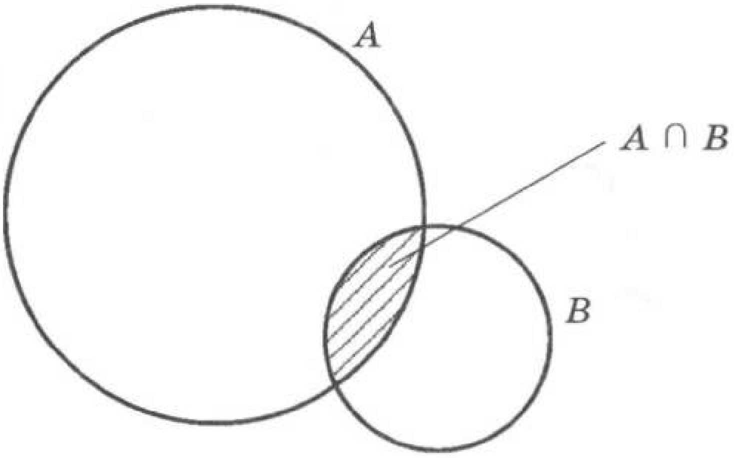
Рәс. 29

3 нче искәрмә. $\in$ һәм $\subset$ тамгалары бер-берсенә охшаганнар. Әмма алар принципта да төрлеләр һәм аларны бутамаска кирәк. Мәсәлән, $1 \subset \{1;\ 2;\ 3\}$ – ялгыш язылыш, чөнки аның сул ягында күплек түгел. Шул ук вакытта, $1 \in \{1;\ 2;\ 3\}$ – дөрес язылыш, ул 1 санының $\{1;\ 2;\ 3\}$ күплеге элементы булуын күрсәтә. $[1;2] \in (0;\ 3)$ – хата, чөнки аның сул ягында күплек элементы түгел, ә ниндидер күплек тора. Ә менә $[1;\ 2] \subset (0;\ 3)$ – дөрес язылыш, геометрик яктан ул $[1;\ 2]$ кисемтәсенең тулысы белән $(0;\ 3)$ интервалында ятуын аңлата (29 нчы рәсем).

3. Күплекләрнең кисешмәсе һәм берләшмәсе

Күплекләрне яссы фигуралар рәвешендә сурәтләү *күплекләр белән гамәлләрне* аңлату өчен бик уңай. Гадәттә күплекләрне ниндидер түгәрәкләр рәвешендә сурәтлиләр. Аларны швейцарияле, озак еллар Россиядә эшләгән бөек математик Леонард Эйлер (1707–1783) хөрмәтенә *Эйлер түгәрәкләре* дип атыйлар.

Күплекләрнең *кисешмәсеннән* башлыйбыз.



Рәс. 30

1 нче билгеләмә. A һәм B **күплекләренең кисешмәсе** дип A һәм B күплекләренең уртак элементларыннан, ягъни A күплегенә дә, B күплегенә дә кергән элементлардан торучы күплекне атыйлар (30 нчы рәсем). A һәм B күплекләренең кисешмәсен $A \cap B$ дип билгелиләр.

Күплекләрне бирүнең безгә билгеле юлларын кулланып, бу билгеләмәне сүзләр белән аңлатудан формаль язылышка да күчерергә мөмкин:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

7 нче мисал. Түбәндәге A һәм B күплекләренең кисешмәсен табарга:

а) $A = \{11, 22, ..., 88, 99\}$, $B = \{3, 6, 9, ...\}$;

б) A – «перераспределение» сүзендә кулланыла торган төрле хәрефләр күплеге, B – «реформирование» сүзендә кулланылган төрле хәрефләр күплеге;

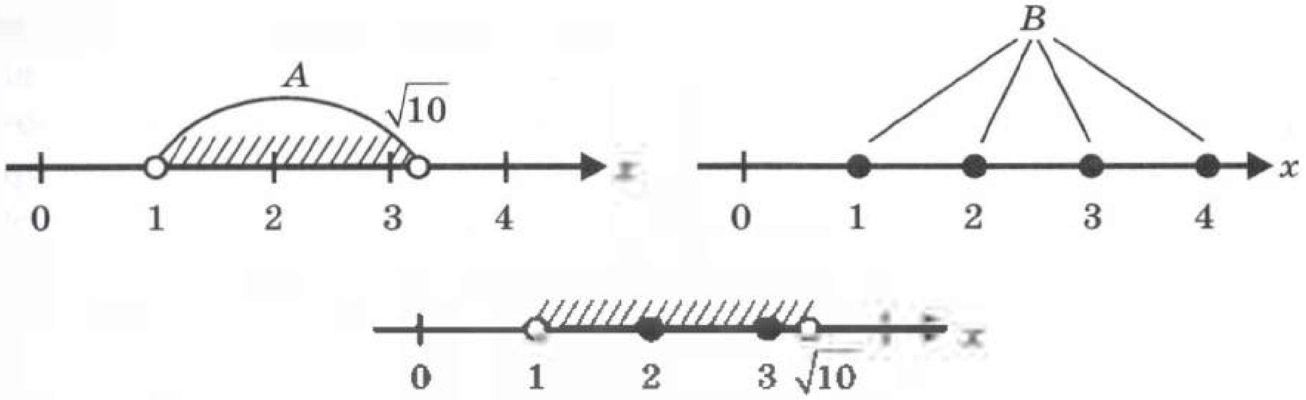
в) $A = \left(1;\ \sqrt{10}\right)$, $B = N$.

Чишү. а) A – 11 гә кабатлы барлык икеурынлы саннар күплеге, B – 3 кә кабатлы барлык натураль саннар күплеге. x элементы A күплегенә дә, B әгәр икеурынлы һәм 11 гә дә, 3 кә дә кабатлы, ягъни 33 кә кабатлы икән, B күплегенә дә керә.

Андый саннар өч кенә: 33, 66 һәм 99.

Шулай итеп, $A \cap B = \{33; 66; 99\}$.

б) Күрсәтелгән саннарда очраган хәрефләрне берәр тапкыр язып алабыз: $A = \{$п, е, р, а, с, д, л, н, и$\}$, $B = \{$р, е, ф, о, л, м, а, н$\}$. Беренче күплекнең барлык элементларын берәрләп тикшерәбез. Әйтик, п $\in A$, ләкин п $\notin B$ икән, «п» хәрефе A һәм B күплекләренең уртак



$A \cap B = \{2; 3\}$

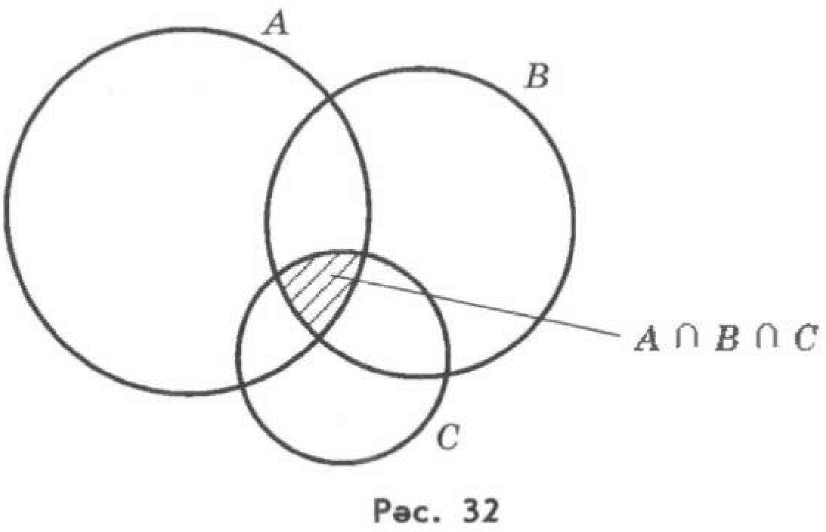
Рәс. 31

ноктасы булмый. Димәк, п $\notin A \cap B$, е $\in A$ һәм е $\in B$ булганлыктан, е $\in A \cap B$. Калган хәрефләрне шулай карап чыгып табабыз: $A \cap B$ = {е, р, а, н, и}.

в) 1 саны $B = N$ күплегенә керә, ләкин $A = (1;\ \sqrt{10})$ күплегенә керми: интервалның очы бу интервалга керми. Димәк, $1 \notin A \cap B$. Биредә $3 < \sqrt{10} < 4$ булганлыктан, 2 һәм 3 саннары A күплегенә дә, B күплегенә дә керә. Димәк, $2 \in A \cap B$ һәм $3 \in A \cap B$. 4 тән башлап барлык натураль саннар $(1;\ \sqrt{10})$ интервалының тышында яталар. Димәк, бу саннар барысы да $A \cap B$ кисешмәсенә кермиләр.

Шулай итеп, $A \cap B = \{2; 3\}$ (31 нче рәсем). ◼

Ике генә түгел, ә өч, дүрт h. б. сандагы күплекләрнең кисешмәсен дә карарга мөмкин. Мәсәлән, A, B һәм C күплекләре *кисешмәсе* дип A күплегенә дә, B күплегенә дә, C күплегенә дә керүче элементлар күплеген атыйлар (32 нче рәсем). А, B һәм C күплекләре кисешмәсен $A \cap B \cap C$ дип билгелиләр.



Рәс. 32

4 нче искәрмә. Сезгә рус әдәбиятыннан берничә шартның берьюлы үтәлүе таләп ителгән классик үрнәк тәкъдим итәбез. Н. В. Гогольнең «Өйләнү» («Женитьба») комедиясендә төп героиня – яшь килен Агафья Тихоновна болай фикер йөртә: «... Әгәр Никанор Ивановичның иреннәрен Иван Кузьмичның борыны янына куйсаң, аларга Балтазар Балтазарычның җор-шуклыгын бераз өстәсәң һәм шулар өстенә Иван Павловичның зыялылыгын да кушсаң – мин шундук риза булыр идем...».

Дүрт кияү егетенең дүрт төрле «өстенлеге» бар һәм кәләш боларның барысын да бер кешедә күрү турында хыяллана. Күплекләр теориясе ягыннан карасак, Агафья Тихоновна дүрт төрле күплек кисешмәсенең буш түгелме икәнен тикшерә.

Математикада күплекләр кисешмәсе операциясен куллану сөйләм телендә «һәм» теркәгечен куллануга туры килә. Аңа кардәш булган «яки» теркәгече күплекләр белән икенче операция – *берләшмә операциясе* белән бәйләнгән.

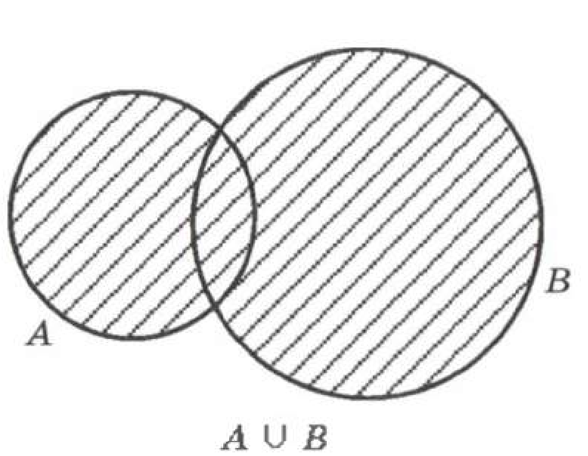
3 нче билгеләмә. A һәм B күплекләренең берләшмәсе дип бу күплекләрнең кимендә берсенә – йә A күплегенә, йә B күплегенә кергән элементлардан торучы күплекне атыйлар (33 нче рәсем). A һәм B күплекләре берләшүен $A \cup B$ дип билгелиләр.

Кисешмә очрагындагы кебек үк, бу билгеләмәне сүзләр белән аңлатудан формаль язылышка күчерергә мөмкин:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ яки } x \in B\}.$$

8 нче мисал. A һәм B күплекләренең берләшүен табарга:

а) A – 105 санының бүлүчеләре күплеге, B – 55 санының бүлүчеләре күплеге;



Рәс. 33

б) A – 3^5 саны язылышындагы цифрлар күплеге, B – 2^{10} язылышындагы цифрлар күплеге;

в) $A = \left(1; \sqrt{10}\right)$, $B = [2; 4]$;

г) A – координаталар яссылыгында абсциссалары 3 тән зуррак булган нокталар күплеге, B – координаталар яссылыгында ординаталары 2 дән зур булмаган нокталар күплеге.

Чишү. а) 105 һәм 55 саннарын гади тапкырлаучыларга таркатабыз. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ һәм $55 = 5 \cdot 11$ булганлыктан, $A = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, ә $B = \{1, 5, 11, 55\}$. Башта A күплегенең барлык элементларын, ә аннан соң B күплегенең A да очрамаган элементларын алабыз (11 һәм 55 өстәлә). Димәк,

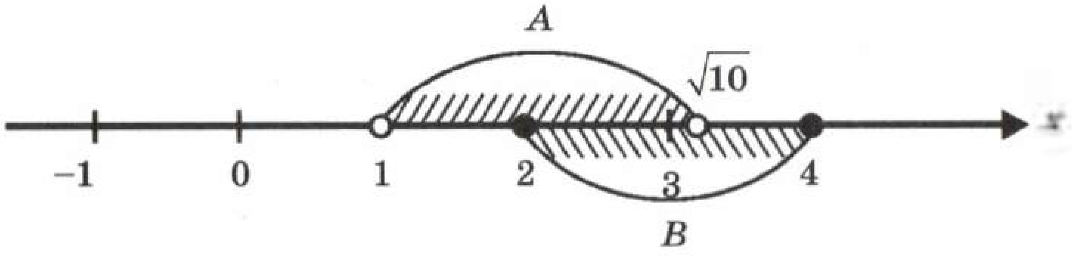
$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 35, 55, 105\}.$$

б) $3^5 = 243$, $2^{10} = 1024$. Димәк, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$. а) пунктындагы кебек эшлибез: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

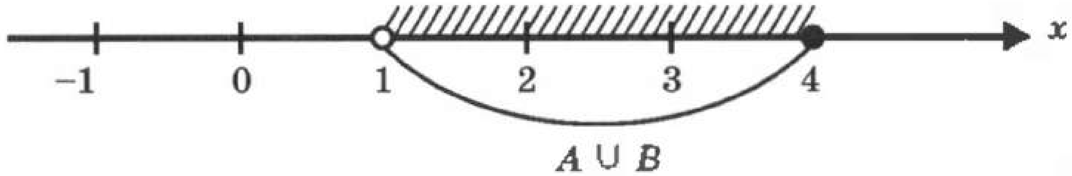
в) Биредә саннар турысы белән эшләү уңай. A һәм B күплекләре элементлары (санлы аралыклары) кисешә, әмма аларның берсе дә икенчесенә тулысынча керми (34 нче рәсем).

Бу күплекләр өчен төрле юнәлешле штрихлар кулланабыз һәм нинди саннар күплеген штрихлаганны карыйбыз: $A \cup B = (1; 4]$ (35 нче рәсем).

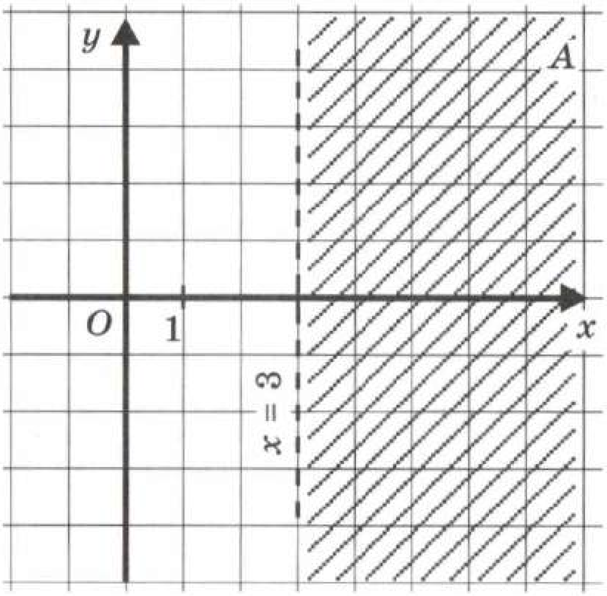
г) Биредә шулай ук сызым куллану уңайрак. A күплеге – вертикаль $x = 3$ турысыннан уңдарак яткан барлык нокталар



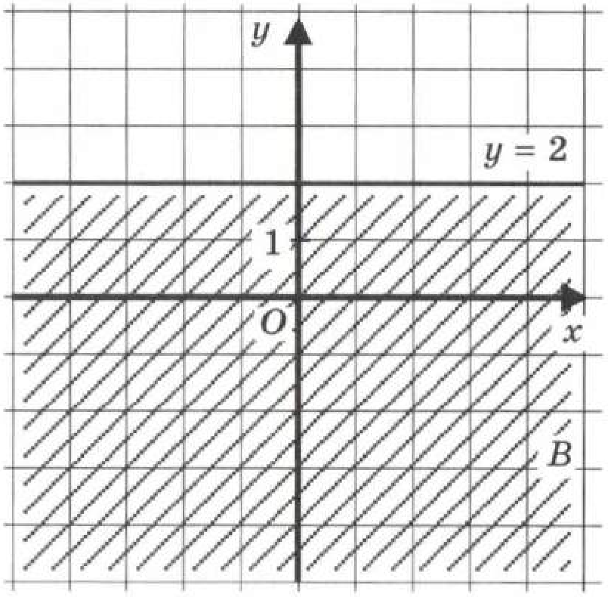
Рәс. 34



Рәс. 35



Рәс. 36

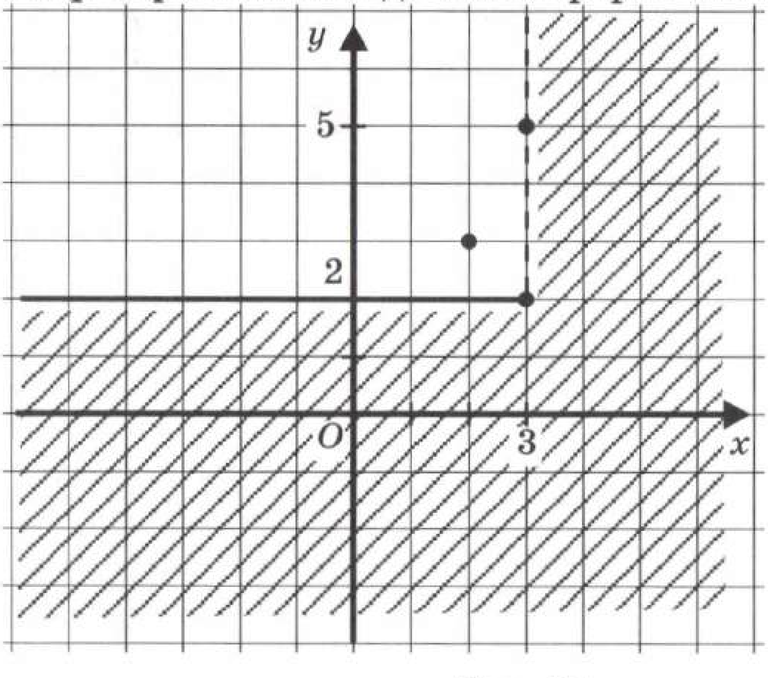


Рәс. 37

күплеге (36 нчы рәсем). B күплеге – горизонталь $y = 2$ турысыннан түбәнрәк яки бу турының үзендә ятучы барлык нокталар күплеге (37 нче рәсем).

Ул чагында $A \cup B$ – яссылыкта без төрлечә штрихлаган барлык нокталар күплеге (38 нче рәсем). Мисал өчен, (3; 2) ноктасының $A \cup B$ берләшмәсенә керүен, ә (2; 3) һәм (3; 5) нокталарының аңа кермәвен билгеләп китәбез. ◼

Кисешмәләрдәге кебек үк, ике, өчбуын, дүрт һ. б. сандагы күплекләр берләшмәсен дә тикшерергә мөмкин. Мәсәлән, A, B



$(2; 3) \notin A \cup B$
$(3; 2) \in A \cup B$
$(3; 5) \notin A \cup B$

Рәс. 38

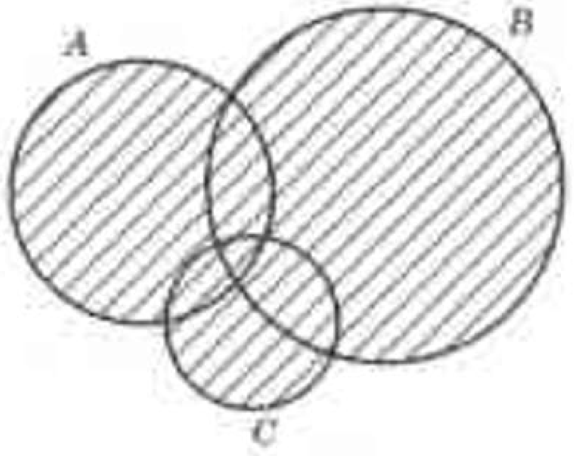


Рис. 39

һәм C күплекләре *берләшмәсе* дип A күплегенә, B күплегенә яки C күплегенә керүче барлык нокталардан торучы күплекне атыйлар. А, B һәм C күплекләре берләшмәсен $A \cup B \cup C$ дип билгелиләр.

5 нче искәрмә. Кисешмә «∩» һәм берләшмә «∪» тамгаларын укучылар еш кына бутыйлар. Истә калдыру өчен, берничә киңәш бирәбез. Берләшмә «∪» тамгасы инглизчә *Union* – берләшү дигән сүзнең беренче хәрефенә охшаган. Икенчесе: берләшмә билгесе «∪» – ачык капчыкка охшый, аңа берләшүче күплекләрнең элементлары тутырыла. Димәк, $A \cup B$ га A һәм B күплекләренең барлык элементлары тутырыла, ә башка төрле элементлар булмый. Әгәр «∪» берләшмә тамгасын яхшылап истә калдырасыз икән, «∩» кисешмә тамгасы – шуннан калганы гына. Шулай ук, «∩» кисешмә тамгасын русча «пересечение» сүзенең беренче хәрефе «П» белән бәйләп тә истә калдырырга мөмкин.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. $x \in A$ язылышы нәрсәне аңлата?
2. $A \subset B$ язылышы нәрсәне аңлата?
3. Математикада $\subset$ һәм $\in$ тамгаларын ничек дип атыйлар?
4. $N \in Z$, $N \subset Z$ язылышы дөресме?
5. $1 \in N$, $1 \subset N$/ язылышы дөресме?
6. Түбәндәге язылышларның кайсылары – дөрес, ә кайсылары дөрес түгел икәнен күрсәтегез:

а) $3{,}5 \in Q$;
б) $3{,}5 \in Z$;
в) $Q \subset Z$;
г) $Z \subset Q$;
д) $0 \in N$;
е) $0 \in Z$;
ж) $0 \in Q$;
з) $(-2; 0) \in [-2; 0]$;
и) $(-2; 0) \subset [-2; 0]$;
к) $(2; 5] \subset [2; 5)$;
л) $(2; 5] \not\subset [2; 5)$;
м) $(2; 5] \subset [2; 5]$;
н) $(2; 5] \not\subset [2; 5]$.

7. {1, 2, 3, 4, 5} күплегенең барлык ике элементлы аскүплекләрен языгыз.

8. {1, 3, 5} күплегенең барлык аскүплекләрен языгыз. Ничә аскүплек табылды? Әгәр алар 8 дән ким икән, югалганнарын табарга тырышыгыз.

9. *A* һәм *B* күплекләренең кисешмәсе дип нәрсәне атыйлар? *A* һәм *B* күплекләренең кисешмәсен ничек билгелиләр?

10. *A* һәм *B* күплекләренең берләшмәсе дип нәрсәне атыйлар? *A* һәм *B* күплекләренең берләшмәсен ничек билгелиләр?

11. $A = [1; 5]$, $B = (3; 8)$ икәне бирелгән. Табыгыз: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$

§ 4. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

Хәзер ике мисал карап үтәрбез. Аларның чишелешләре сезнең өчен яңа математик модель – тигезсезлекләр системаларын ачар.

1 нче мисал. Аңлатманың билгеләнү өлкәсен табарга:

$$f(x) = \sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}.$$

Чишү. Квадрат тамыр астында торучы аңлатма тискәре булмаска, ягъни берьюлы ике тигезсезлек: $2x - 4 \geqslant 0$ 0 һәм $8 - x \geqslant 0$ үтәлергә тиеш. Мондый очракларда мәсьәлә

$$\begin{cases} 2x - 4 \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

тигезсезлек системасын чишүгә кайтып кала, диләр.

Тик мондый математик модель (тигезсезлек системасы) белән безгә очрашырга туры килмәгән иде. Аны соңрак чишәрбез.

2 нче мисал. Натураль сан уйлаганнар. Аның квадратына 13 не кушкач, сумма уйланган сан белән 14 саны тапкырчыгышыннан зуррак була. Ә инде уйланган сан квадратына 45 не кушкач, сумма уйланган сан белән 18 саны тапкырчыгышыннан кечерәк була. Нинди сан уйлаганнар?

Чишү. Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x – уйланылган сан, ди. Беренче шарт буенча x^2 һәм 13 саннары суммасы $14x$ санынннан зуррак; бу $x^2 + 13 > 14x$ ти-

гезсезлеге үтәлә дигән сүз. Икенче шарт буенча x^2 һәм 45 саннары суммасы $18x$ санынннан кечерәк, ягъни $x^2 + 45 < 18x$ тигезсезлеге үтәлә. Әлеге тигезсезлекләр берьюлы үтәлергә тиеш, димәк, сүз тигезсезлекләр системасын чишү турында бара:

$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x, \\ x^2 + 45 < 18x. \end{cases}$$

Хәзергә мәсьәләне чишүнең икенче этабына – төзелгән математик модель белән эшләүгә керешә алмыйбыз. Башта яңа модельне – тигезсезлек системасын өйрәнергә кирәк.

Билгеләмә. Әгәр бер x үзгәрешлесе кергән берничә тигезсезлекнең һәркайсы өчен үзгәрешленең аларны дөрес санлы тигезсезлеккә әверелдерә торган барлык кыйммәтләрен табу мәсьәләсе куелса, алар **тигезсезлекләр системасын** (кыскалык өчен тигезсезлек системасын) барлыкка китерәләр. Үзгәрешле x ның теләсә кайсы шундый кыйммәтен **тигезсезлек системасының** чишелеше (яки **аерым чишелеше**) дип атыйлар.

Тигезсезлек системасының барлык чишелешләре (аерым чишелешләре) күплеге **тигезсезлек системасының гомуми чишелешен** (ешрак гадирәк итеп, **тигезсезлек системасының чишелеше** диләр) хасил итә.

Система төзүче тигезсезлекләр фигуралы җәяләр белән берләштерелә (тигезләмәләр системаларында сез моны күргән идегез). Мәсәлән,

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11 \end{cases}$$

язылышы $2x - 1 > 3$ һәм $3x - 2 < 11$ тигезсезлекләре тигезсезлек системасын төзи дигәнне аңлата.

Кайвакыт тигезсезлек системасын *икеле тигезсезлек* рәвешендә язуны да кулланалар. Мәсәлән,

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 2x - 1 < 11 \end{cases}$$

тигезсезлек системасын $3 < 2x - 1 < 11$ рәвешендә икеле тигезсезлек итеп язарга мөмкин.

Түбәндәге тигезсезлек системасын карыйк:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11. \end{cases}$$

Аның берничә аерым чишелешен сайлап алырга мөмкин, мәсәлән, $x = 3$, $x = 4$, $x = 3{,}5$. Чынлап та, $x = 3$ булганда, беренче тигезсезлек $5 > 3$, ә икенчесе $7 < 11$ рәвешен алалар. Ике дөрес санлы тигезсезлек барлыкка килде, димәк, $x = 3$ – тигезсезлек системасының аерым чишелеше. Шундый ук юл белән $x = 4$, $x = 3{,}5$ нең дә бу системаның чишелеше икәнен дәлилләргә мөмкин.

Шул ук вакытта, $x = 5$ тигезсезлек системасының аерым чишелеше түгел, $x = 5$ булганда, беренче тигезсезлек $9 > 3$ рәвешен алып, дөрес тигезсезлек барлыкка китерә. Ә икенчесе $13 < 11$ рәвешен ала, бу дөрес булмаган санлы тигезсезлек.

Тигезсезлекләр системасын чишү – аның барлык аерым чишелешләрен табу дигән сүз. Билгеле, алда күрсәтелгән уйлап табу юлы – тигезсезлек системасын чишү алымы була алмый.

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0? \end{cases}$$

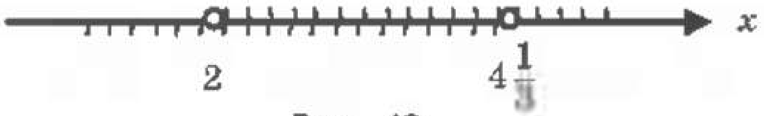
системасын ничек чишәргә соң?

Әйтик, x_1 – $f(x) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше (аерым чишелешләре күплеге), x_2 – $g(x) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше (аерым чишелешләре күплеге) булсын, ди. Безне исә x ның x_1 күплегенә дә, X_2 күплегенә дә керә торган кыйммәтләре кызыксындыра. Димәк, безгә $X_1 \cap X_2$ күплеге кирәк (§ 3) – бу кисешмә тигезсезлек системасының чишелеше була да инде.

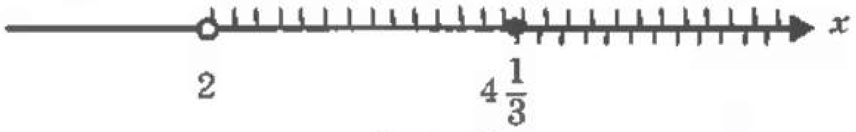
3 нче мисал. Тигезсезлек системасын чишәргә:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 1 \leqslant 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{cases}$

Чишү. а) Беренче тигезсезлекне чишеп табабыз: $2x > 4$; $x > 2$. Икенче тигезсезлекне чишеп табабыз: $3x < 13$; $x < \frac{13}{3}$, ягъни $x < 4\frac{1}{3}$. Бу ике аралыкны саннар турысында ике төрле штрих (беренче аралык өстә, икенчесе аста штрихлана) белән күрсәтәбез (40 нчы рәсем). Тигезсезлек системасының чишелеше системадагы тигезсезлекләрнең чишелешләре кисешмәсе, ягъни ике штрих туры килгән аралык (яки берничә аралык) була. Без тикшергән мисалда – $\left(2; 4\frac{1}{3}\right)$ интервалы.



Рәс. 40



Рәс. 41

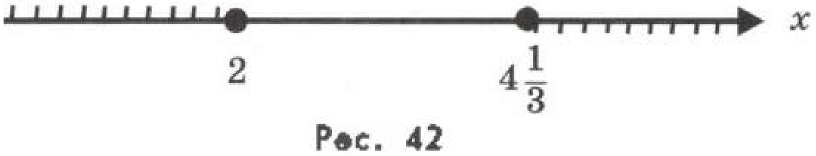
б) Системаның беренче тигезсезлеген чишеп, $x > 2$ не, икенче тигезсезлекне чишеп, $x > 4$ не табабыз. Бу ике аралыкны төрле штрихлар белән саннар турысында күрсәтәбез (41 нче рәсем). Тигезсезлекләр системасының чишелеше – системадагы тигезсезлекләрнең чишелешләре кисешмәсе. Бу мисалда $\left[4\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ нурын табабыз.

в) Беренче тигезсезлекне чишеп, $x \leqslant 2$ не, икенче тигезсезлекне чишеп, $x \geqslant 4\frac{1}{3}$ не табабыз. Бу аралыкларны шулай ук ике төрле штрих белән саннар турысында күрсәтәбез (42 нче рәсем). Тигезсезлек системасының чишелеше – аерым тигезсезлекләрнең кисешмәсе, ягъни ике төрле штрих та ясалган аралык була. Биредә андый уртак өлеш юк, димәк, тигезсезлек системасының чишелешләре булмый.

Җавап: а) $2 < x < 4\frac{1}{3}$; б) $x \geqslant 4\frac{1}{3}$; в) чишелешләре юк (кайвакыт бу сүзләрне буш күплек символы $\varnothing$ белән алыштыралар).

Алдагы мисалны карагандагы фикер йөртүләрне гомумиләштерәбез. Безгә тигезсезлек системасын чишәргә кирәк булсын:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$



Рәс. 42

Әйтик, $(a;\ b)$ интервалы – $f_1(x) > g_1(x)$ тигезсезлегенең чишелеше, ә $(c;\ d)$ интервалы – $f_2(x) > g_2(x)$ тигезсезлегенең чишелеше, ди (43 нче рәсем). *Тигезсезлек системасының чишелеше система тигезсезлекләре чишелешләренең кисешмәсе була.* Безнең мисалда ул $(c;\ b)$ интервалы.

Рәс. 43

Хәзер без 1 нче мисалдагы тигезсезлек системасын җиңел генә чишә алабыз:

$$\begin{cases} 2x - 4 \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Беренче тигезсезлекне чишеп $x \geqslant 2$ не, икенчесен чишеп, $x \leqslant 88$ не табабыз. Бу аралыкларны (нурларны) саннар турысында билгелибез (44 нче рәсем). Тигезсезлек системасының чишелеше андагы тигезсезлекләр чишелешләренең кисешмәсенә, ягъни $[2;\ 8]$ кисемтәсенә тигез була. 1 нче мисалдагы аңлатманың билгеләнү өлкәсен таптык.

Рәс. 44

Билгеле инде, тигезсезлек системасы сызыкча тигезсезлекләрдән генә тормый (әлегә кадәр шулай булды), теләсә нинди рациональ тигезсезлекләр очрарга мөмкин. Сызыкча булмаган рациональ тигезсезлек системалары белән техник эшләү бераз катлаулырак, ләкин биредә өр-яңа кыенлыклар юк.

4 нче мисал. Тигезсезлек системасын чишәргә:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ 5x - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Чишү. 1) $x^2 - 9 \geqslant 0$ тигезсезлеген чишәбез:

$$(x - 3)(x + 3) \geqslant 0$$

Саннар турысында -3 һәм 3 нокталарын билгелибез (45 нче рәсем). Алар турыны өч аралыкка бүлә, һәм $p(x) = (x - 3)(x + 3)$ аңлатмасы аларның һәркайсында даими тамгасын саклый. Бу

Рәс. 45

тамгалар 45 нче рәсемдә күрсәтелгән. Безне $p(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлгән (алар 45 нче рәсемдә штрихланган) аралыклар һәм $p(x) = 0$ тигезлеге үтәлгән нокталар, ягъни $x = -3$, $x = 3$ нокталары (45 нче рәсемдә алар кара түгәрәкләр белән билгеләнгән) кызыксындыра. Шулай итеп, 45 нче рәсемдә беренче тигезсезлек чишелешенең геометрик сурәте күрсәтелә.

2) Икенче тигезсезлекне чишәбез: $5x - x^2 \geqslant 0$,

ягъни $x(5 - x) \geqslant 0$.

Рәс. 46

Саннар турысында 0 һәм 5 нокталарын билгелибез (46 нчы рәсем). Алар турыны өч аралыкка бүлә һәм һәр аралыкта $q(x) = x(5 - x)$ аңлатмасы үзенең даими тамгасын саклый (тамгалар 46 нчы рәсемдә күрсәтелгән). Безне $q(x) > 0$ тигезсезлеге үтәлә торган аралыклар (ул 46 нчы рәсемдә штрихланган) кызыксындыра, шулай ук $q(x) = 0$ тигезлеге үтәлә торган нокталар, ягъни $x = 0$, $x = 5$ нокталары да кирәк (алар 46 нчы рәсемдә кара түгәрәкләр белән билгеләнгән). Шулай итеп, 46 нчы рәсемдә тигезсезлек системалары чишелешенең геометрик сурәте күрсәтелгән.

3) Системадагы беренче һәм икенче тигезсезлекләрнең чишелешләрен саннар турысында билгелибез. Беренчесенең чишелеше – өске штрих, икенченең чишелеше аскы штрих белән аерып күрсәтелгән. Тигезсезлекләр чишелешләренең кисешмәсе – тигезсезлек системасының чишелеше була. Бу мисалда ул [3; 5] кисемтәсеннән гыйбарәт.

Җавап: $3 \leqslant x \leqslant 5$.

Рәс. 47

5 нче мисал. Тигезсезлек системасын чишәргә:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 > 0. \end{cases}$

Чишү. а) Беренче тигезсезлекне чишеп, $x > 2$ не табабыз. Икенче тигезсезлекне карыйк. Квадрат $x^2 + x + 2$ өчбуынының реаль тамырлары юк, ә өлкән коэффициенты (x^2 алдындагы) – уңай сан. Димәк, барлык x лар өчен $x^2 + x + 2 > 0$ тигезсезлеге үтәлә, шунлыктан икенче тигезсезлекнең чишелешләре булмый. Шулай булгач, тигезсезлек системасының да чишелешләре булмый.

б) Беренче тигезсезлектән $x > 2$ не табабыз. Икенче тигезсезлек x ның барлык кыйммәтләрендә дә үтәлә. Бу очракта системаның чишелеше беренче тигезсезлекнең чишелешенә тәңгәл була.

Җавап: а) $\varnothing$; б) $x > 2$.

Әлеге мисал түбәндәге файдалы расламаларны ачык сурәтли:

1. Әгәр бер үзгәрешлеле берничә тигезсезлектән торучы системада бер тигезсезлекнең чишелеше булмаса, системаның да чишелеше булмый.

2. Әгәр бер үзгәрешлеле ике тигезсезлектән торучы системада бер тигезсезлек үзгәрешленең барлык кыйммәтләрендә дә үтәлсә, системаның чишелеше булып икенче тигезсезлекнең чишелеше тора.

Параграф ахырында уйланылган сан турындагы мәсьәләгә кире кайтып, аны тиешенчә чишеп бетерербез.

2 нче мисал. Натураль сан уйлаганнар. Аның квадратына 13 не кушкач, сумма уйланган сан белән 14 саны тапкырчыгышыннан зуррак була. Ә инде уйланган сан квадратына 45 не кушкач, сумма уйланган сан белән 18 саны тапкырчыгышыннан кечерәк була. Нинди сан уйлаганнар?

Чишү. Беренче этап. *Математик модель төзү.* Алда карап үтелгәнчә (к.: 41 б.), уйланган x саны түбәндәге тигезсезлекне канәгатьләндерергә тиеш:

$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x, \\ x^2 + 45 < 18x. \end{cases}$$

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*
Системаның беренче тигезсезлеген

$$x^2 - 14x + 13 > 0$$

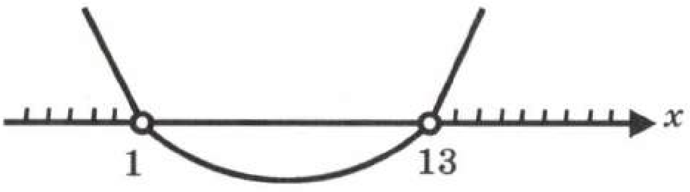
рәвешенә китерәбез. $x^2 - 14x + 13$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз: $x_1 = 1$, $x_2 = 13$. Безне кызыксындырган тигезсезлек $x < 1$ яки $x > 13$ булганда үтәлә (48 нче рәсем).

Системаның икенче тигезсезлеген

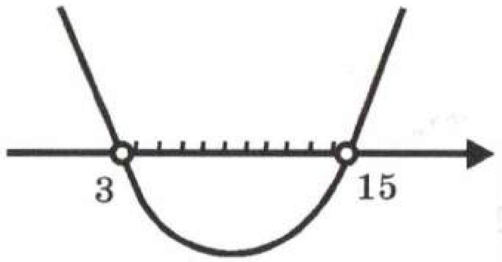
$$x^2 - 18x + 45 < 0$$

рәвешенә китерәбез. $x^2 - 18x + 45$ квадрат өчбуынының тамырларын табабыз: $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. Безгә кирәкле тигезсезлек $3 < x < 15$ булганда үтәлә (49 нчы рәсем).

Табылган чишелешләрнең кисешмәсе булып (13; 15) интервалы тора (50 нче рәсем).



Рәс. 48



Рәс. 49

Рәс. 50

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*
Безне (13; 15) интервалына керүче натураль сан кызыксындыра. Шундый сан – 14 саны.

Җавап: 14 санын уйлаганнар.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Тигезсезлекләр системасы нәрсә ул?

2. Әгәр A күплеге $f(x) > 0$ тигезсезлегенең, ә B күплеге $g(x) < 0$ тигезсезлегенең чишелеше булса, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ тигезсезлек системасының чишелеше нинди булыр?

3. Бер үзгәрешлеле ике тигезсезлек системасын чишү алгоритмын сурәтләгез. Аны сызыкча тигезсезлек системаларын чишү өчен кулланыгыз:

а) $\begin{cases} 3x + 5 > 8, \\ 2x - 7 < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 5 < 8, \\ 2x - 7 < 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 5 > 8, \\ 2x - 7 > 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 5 < 8, \\ 2x - 7 > 3. \end{cases}$

4. Тигезсезлекләр системасы бирелгән: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ Биредә $f(x) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше булмавы ачыкланган. Бирелгән системаның чишелеше турында нәрсә әйтә аласыз?

5. Тигезсезлекләр системасы бирелгән: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ Биредә $f(x) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше булып A күплеге торуы, ә $g(x) < 0$ тигезсезлегенең исә, үзгәрешленең теләсә нинди кыйммәтләрендә дә үтәлүе ачыкланган. Бирелгән системаның чишелеше турында нәрсә әйтә аласыз?

ГОМУМИ НӘТИҖӘЛӘР

- Бу бүлектә сез бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр чишүгә караган түбәндәге **төшенчәләр** белән таныштыгыз:
  аерым чишелеш, гомуми чишелеш, тигезсезлекнең чишелеше;
  рациональ тигезсезлек;
  тигезкөчле тигезсезлекләр, тигезсезлекне тигезкөчле рәвешүзгәртү;
  тигезсезлек системалары;
  тигезсезлек системаларын чишү.

1. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР ҺӘМ АЛАРНЫҢ СИСТЕМАЛАРЫ

- Сез рациональ тигезсезлекләр чишүдә актив кулланыла торган **интерваллар алымы** белән таныштыгыз.
- Сез математикада гомуми кабул ителгән **күплекләр теориясе** теленең башлангыч төшенчәләре белән таныштыгыз:
  күплекнең элементы, бирелгән күплекнең аскүплеге;
  күплекләрнең кисешмәсе һәм берләшмәсе;
  буш күплек.
- Сез күплекләрнең кисешмәсен һәм берләшмәсен табарга өйрәндегез.

ТИКШЕРЕНҮ ЭШЛӘРЕ ТЕМАЛАРЫ

1. Күплекләр белән гамәлләр.
2. Тигезсезлек җыелмалары турында.

2 БҮЛЕК ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАЛАРЫ

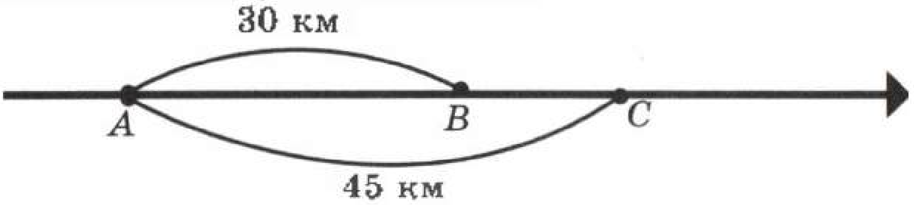
§ 5. Төп төшенчәләр
§ 6. Тигезләмә системаларын чишү юллары
§ 7. Реаль хәлләрнең математик модельләре буларак тигезләмә системалары

§ 5. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

Тигезләмә системалары белән сез инде 7 нче сыйныф алгебра курсында очрашкан идегез, тик алар ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системалары гына иде. Хәзер исә ике үзгәрешле кергән сызыкча булмаган (нәсызыкча) тигезләмә системаларын чишү турында сөйләшербез, чөнки мондый системалар бик еш кына реаль очракларның математик модельләренә тәңгәл килә.

1 нче мисал. *B* һәм *C* пристаньнары *A* пристаненнан агым уңаена тиңдәшле рәвештә 30 км һәм 45 км түбәндәрәк урнашканнар (51 нче рәсем). Моторлы көймә *A* дан чыгып китеп, *C* га җитә һәм, шундук кире борылып, *B* га килә. Барлык юлга ул 4 сәг 40 мин вакыт сарыф итә. Икенче очракта шул ук көймә *C* дан кузгала, *A* га җитеп, кире борыла һәм *B* га килеп туктый, барлык юлга 7 сәг вакыт сарыф итә. Көймәнең үз тизлеге һәм елганың агым тизлеге нинди?

Чишү. Ике үзгәрешле кертәбез:
x км/сәг – көймәнең үз тизлеге;
y км/сәг – елганың агым тизлеге.



Рәс. 51

Ул чагында $x + y$ км/сәг – көймәнең агым уңаена тизлеге, $x - y$ км/сәг – көймәнең агымга каршы тизлеге.

Көймәнең беренче рейсын карыйк. Ул елга агымы уңаена A дан C га кадәр 45 км һәм агымга каршы C дан B га кадәр 15 км дан гыйбарәт. Димәк, $\frac{45}{x+y}$ сәг – көймәнең A дан C га хәрәкәте вакыты, $\frac{15}{x-y}$ сәг – көймәнең C дан B га хәрәкәте вакыты. Көймә беренче рейска 4 сәг 40 мин, ягъни $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ сәг вакыт сарыф итә.

Шулай итеп, тигезләмәне табабыз:

$$\frac{45}{x+y} + \frac{15}{x-y} = \frac{14}{3}.$$

Көймәнең икенче рейсын карыйбыз. Ул агымга каршы C дан A га кадәр 45 км һәм агым уңаена A дан B га кадәр 30 кмдан гыйбарәт. Димәк, $\frac{45}{x-y}$ сәг – көймәнең C дан A га хәрәкәте вакыты, $\frac{30}{x+y}$ сәг – көймәнең A дан B га хәрәкәте вакыты. Икенче рейска көймә 7 сәг вакыт сарыф итә. Шулай итеп, тигезләмә төзибез:

$$\frac{45}{x-y} + \frac{30}{x+y} = 7.$$

Мәсьәләнең математик моделе ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасыннан гыйбарәт:

$$\begin{cases} \frac{45}{x+y} + \frac{15}{x-y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{45}{x-y} + \frac{30}{x+y} = 7. \end{cases}$$

Бу системаны без әле чишә белмибез һәм аңа §7 та гына әйләнеп кайтырбыз. Ә хәзергә теоретик нигез булдырырга кирәк.

1. Ике үзгәрешлеле рациональ тигезләмәләр

1 нче билгеләмә. **Ике x, y үзгәрешлеле рациональ тигезләмә** ул $h(x; y) = g(x; y)$ рәвешендәге тигезләмә, биредә $h(x; y)$, $g(x; y)$ – рациональ аңлатмалар, ягъни саннар һәм x,

y үзгәрешлеләреннән кушу, алу, тапкырлау, бүлү һәм натураль дәрәҗәгә күтәрү гамәлләре ярдәмендә төзелгән алгебраик аңлатмалар.

Ике үзгәрешлеле рациональ тигезләмәләргә мисаллар:

$$x^2 + y^2 = 58; \quad y - x = 4; \quad 2xy + x^3 = 0;$$

$$\frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x-y} = 2y - 1 \text{ һ. б.}$$

Билгеле, рациональ тигезләмәләргә x, y үзгәрешлеләре генә түгел, башка үзгәрешлеләр дә кергән булырга мөмкин, мәсәлән, $a^3 - b^4 = 3ab$ – ике a, b үзгәрешлеле рациональ тигезләмә.

Рациональ $h(x;\ y) = q(x;\ y)$ тигезләмәсен һәрвакыт $p(x;\ y) = 0$ рәвешенә китерергә мөмкин, биредә $p(x;\ y)$ – рациональ аңлатма. Моның өчен тигезләмәне болай күчереп язу да җитә: $h(x;\ y) - q(x;\ y) = 0$. Әгәр $p(x;\ y)$ – күпбуын икән, $p(x;\ y) = 0$ не *бөтен рациональ тигезләмә* дип атыйлар.

2 нче билгеләмә. $p(x;\ y)=0$ **тигезләмәсенең чишелеше** дип бу тигезләмәне канәгатьләндерә, ягъни үзгәрешлеләр кергән $p(x;\ y)$ тигезлеген дөрес санлы тигезлеккә әверелдерә торган теләсә нинди $(x;\ y)$ саннар парын атыйлар.

Мәсәлән,

1) $(3;\ 7)$ – $x^2 + y^2 = 58$ тигезләмәсенең чишелеше. Чынлап та, $3^2 + 7^2 = 58$ – дөрес санлы тигезлек.

2) $\left(\sqrt{22};\ -6\right)$ – $x^2 + y^2 = 58$ тигезләмәсенең чишелеше. Чөнки $\left(\sqrt{22}\right)^2 + (-6)^2 = 58$ – дөрес санлы тигезлек $(22 + 36 = 58)$.

3) $(0;\ 5)$ – $2xy + x^3 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше, чөнки $2\cdot 0{,}5 + 0^3 = 0$ — дөрес санлы тигезлек.

$(1;\ 2)$ – $2xy + x^3 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше була алмый. Чынлап та, $2\cdot 1\cdot 2 + 1^3 = 0$ — дөрес санлы тигезлек түгел $(5 = 0)$.

2 нче мисал. $(2x - 8)^2 + (y + 3)^4 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. x, y ның теләсә кайсы кыйммәтләрендә $(2x - 8)^2 \geqslant 0$, $(y + 3)^4 \geqslant 0$ тигезсезлекләре үтәлә. Димәк, бирелгән тигезләмәнең сул ягы һәрвакыт тискәре түгел, шулай ук аның нульгә тигез булуы бер генә очракта, ике кушылучы да нульгә тигез булганда гына мөмкин. Шулай итеп, мәсьәлә түбәндәге тигезләмә системасын чишүгә кайтып кала:

$$\begin{cases}(2x-8)^2=0,\\(y+3)^4=0.\end{cases}$$

Аны чишеп, табабыз: $2x - 8 = 0$, ягъни $x = 4$; $y + 3 = 0$, ягъни $y = -3$.

Җавап: (4; −3).

3 нче мисал. $x - y = 10$ тигезләмәсенең бөтен санлы чишелешләрен табарга.

Чишү. Әгәр $x = k$, $k \in Z$ булса, $x - y = 10$ тигезләмәсе $k - y = 10$ рәвешен ала, аннан $k - y = 10$ ны табабыз; бу бөтен сан. Димәк, тигезсезлекнең бөтен санлы чишелешләре булып (k; $k - 10$ рәвешендәге, биредә $k \in Z$, теләсә нинди саннар парлары тора. ■

Әгәр берничә үзгәрешле һәм бөтен коэффициентлар ярдәмендә төзелгән бөтен рациональ тигезләмә бирелсә һәм аның бөтен санлы (гомуми очракта рациональ) чишелешләрен табарга кирәк булса, *Диофант тигезләмәсе* бирелгән, диләр (борынгы грек математигы Диофант хөрмәтенә; III йөз тирәсе). Диофант тигезләмәсен *аныксыз тигезләмә* дип тә йөртәләр. Аныксызлык, кагыйдә буларак, 3 нче мисалдагы кебек чиксез күп чишелешләре булу белән бәйләнгән.

Күпчелек очракларда Диофант тигезләмәләрен чишү шактый кыенлыклар тудыра. Кайвакыт бөтен саннарның бүленүчәнлеген куллану уңышлы нәтиҗә бирә.

4 нче мисал. $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенең бөтен санлы чишелешләрен табарга.

Чишү. Әйтик, $(x; y)$ – тигезләмәнең чишелеше булсын. Ул чагында $17 - 3y = 2x$. Биредә x – бөтен сан булганлыктан, $17 - 3y$ — җөп сан. Үзгәрешле y җөп һәм төп булган очракларны аерым тикшерербез.

Әгәр y җөп сан булса, $3y$ – җөп сан, ә $17 - 3y$ саны, так 17 саны белән җөп $3y$ саны аермасы буларак, так сан. Димәк, бу очрак безгә туры килми.

Әгәр y так сан булса, $y = 2k + 1$, биредә k – бөтен сан. Ул вакытта $17 - 3y = 17 - 3(2k + 1) = 17 - 6k - 3 = 14 - 6k = 2(7 - 3k)$. Ә шарт буенча $17 - 3y = 2x$ булганлыктан, $2(7 - 3k) = 2x$, $x = 7 - 3k$.

Шулай итеп, әгәр $(x; y)$ бирелгән тигезләмәнең чишелеше булса, $x = 7 - 3k$, ә $y = 2k + 1$, биредә k – бөтен сан.

Киресе дә дөрес икәнен, ягъни $x = 7 - 3k$, $y = 2k + 1$ булганда, $(x;y)$ ның $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенең чишелеше икәнен тикшерик.

Куеп карыйбыз:

$$2x + 3y = 2(7 - 3k) + 3(2k + 1) = 14 - 6k + 6k + 3 = 17.$$

Димәк, $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ рәвешендәге теләсә кайсы пар $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенең чишелеше була.

Сезгә бу нәтиҗә аңлаешлырак булсын өчен, k параметрына берничә бөтен кыйммәт биреп карыйбыз.

$k = 0$ булсын; ул вакытта $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ пары $(7;\ 1)$ парына әверелә. $x = 7$, $y = 1$ кыйммәтләрен $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенә куеп, $14 + 3 = 17$ – дөрес тигезлектабабыз.

$k = 1$ булсын; ул вакытта $(7 - 3к;\ 2k + 1)$ пары $(4;\ 3)$ кә әйләнә. $x = 4$, $y = 3$ кыйммәтләрен $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенә куеп, $8 + 9 = 17$ – дөрес тигезлек табабыз.

$k = 2$ булсын; ул вакытта $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ пары $(1;\ 5)$ кә әйләнә. $x = 1$, $y = 5$ кыйммәтләрен $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенә куеп, $2 + 15 = 17$ – дөрес тигезлек табабыз.

$k = -1$ булсын; ул вакытта $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ пары $(10;\ -1)$ кә әверелә. $x = 10$, $y = -1$ кыйммәтләрен $2x + 3y = 17$ тигезләмәсенә куеп, $20 - 3 = 17$ – дөрес тигезлек табабыз.

Табылган нәтиҗәләрне таблицага язабыз.

k	$x = 7 - 3k$	$y = 2k + 1$	$2x + 3y$
0	7	1	$2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 14 + 3 = 17$
1	4	3	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$
2	1	5	$2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$
-1	10	-1	$2 \cdot 10 + 3 \cdot (-1) = 20 - 3 = 17$

k параметрының барлык башка кыйммәтләре өчен дә шул укнәтиҗә табыла.

Җавап: $(7 - 3k;\ 2k + 1)$, биредә $k \in \mathbb{Z}$.

5 нче мисал. $4x + 7y = 29$ тигезләмәсенең бөтен санлы чишелешләрен табарга.

Чишү. Тигезләмәне $x = \frac{29 - 7y}{4}$ рәвешенә китерәбез һәм биредә $x = \frac{28 + 1 - 7y}{4}$, ягъни $x = 7 - \frac{7y - 1}{4}$. Күргәнебезчә, x ның

кыйммәте $p(y) = 7y - 1$ нең кыйммәте 4 кә калдыксыз бүленгәндә һәм бары шул вакытта гына бөтен сан була. Бөтен y саны 4 саны белән дүрт төрле бәйләнергә мөмкин: ул 4 санына кабатлы, ул 4 кә бүлгәндә, 1 калдык бирә, ул 4 кә бүлгәндә, 2 калдык бирә, ул 4 кә бүлгәндә, 3 калдык бирә. Бу мөмкинлекләрне хәзер аерым карап чыгабыз.

1) $y = 4n$. Ул вакытта $p(y) = 7y - 1 = 7 \cdot 4n - 1 = 28n - 1$. Бу сан 4 кә бүленми.

2) $y = 4n + 1$. Ул вакытта $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 1) - 1 = 28n + 6$. Бу сан 4 кә бүленми.

3) $y = 4n + 2$. Ул вакытта $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 2) - 1 = 28n + 13$. Бу сан 4 кә бүленми.

4) $y = 4n + 3$. Ул вакытта $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 3) - 1 = 28n + 20$. Бу сан 4 кә бүленә.

Шулай итеп, $y = 4n + 3$. Ул чагында $x = 7 - \frac{7y - 1}{4} = 7 - \frac{28n + 20}{4} =$
$= 7 - (7n + 5) = 2 - 7n$.

Җавап. $(2 - 7n; 4n + 3)$, биредә $n \in \mathbf{Z}$.

6 нчы мисал. $4x^2 - y^2 = 11$ тигезләмәсенең бөтен санлы чишелешен табарга.

Чишү. Тигезләмәне $(2x - y)(2x + y) = 11$ рәвешенә китерәбез. Аның сул ягы – ике бөтен сан тапкырчыгышы. Ул бары тик дүрт очракта гына 11 гә тигез була ала: беренче тапкырлаучы 1 гә, ә икенчесе 11 гә тигез; беренче тапкырлаучы −1 гә, икенчесе −11 гә тигез; беренче тапкырлаучы 11 гә, икенчесе 1 гә тигез; беренче тапкырлаучы −11 гә, икенчесе −1 гә тигез. Димәк, мәсьәлә дүрт тигезләмә системасын чишүгә кайтып кала:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 11, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -11, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Беренче системадан $x = 3$, $y = 5$; икенчесеннән $x = -3$, $y = -5$; өченчесеннән $x = 3$, $y = -5$; дүртенчесеннән $x = -3$, $y = 5$ килеп чыга.

Җавап: $(3; 5)$, $(-3; -5)$, $(3; -5)$, $(-3; 5)$

Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр өчен, бер үзгәрешле тигезләмәләрдәге кебек, тигезкөчлелек төшенчәсен кертергә мөмкин.

3 нче билгеләмә. Чишелешләре бер үк төрле булган (аерым алганда, чишелешләре булмаган) ике $p(x; y) = 0$ һәм $q(x; y) = 0$ тигезләмәсен **тигезкөчле** дип атыйлар.

Гадәттә, тигезләмәләр чишкән вакытта, бирелгән тигезләмәне аңа тигезкөчле булган гадирәк тигезләмә белән алыштырырга тырышалар. Мондый алыштыруны **тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртү** дип атыйлар. Түбәндә ике төп тигезкөчле рәвешүзгәртү күрсәтелә.

1) *Тигезләмә буыннарын капма-каршы тамгасы белән аның бер ягыннан икенчесенә чыгару.*

Мәсәлән, $2x + 5y = 7x - 8y$ тигезләмәсен $2x - 7x = -8y - 5y$ ка алыштыру тигезләмәне тигезкөчле рәвешүзгәртү була.

2) *Тигезләмәнең ике ягын да нульгә тигез булмаган санга яки һәрвакыт нульдән аерылып торган аңлатмага тапкырлау һәм бүлү.*

Бер үзгәрешлеле тигезләмәләрдәге кебек, тигезкөчле булмаган рәвешүзгәртү килеп чыккан очраклар:

а) *үзгәрешлесе булган ваклаучыдан котылу;*

б) *тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрү.*

Әгәр тигезләмәне чишү барышында алда күрсәтелгән рәвешүзгәртүләрнең берәрсе кулланылса, барлык табылган чишелешләрне тигезләмәгә куеп карап тикшерергә кирәк, чөнки алар арасында чит, ягъни тигезләмәне канәгатьләндерми торган чишелешләр дә булуы мөмкин.

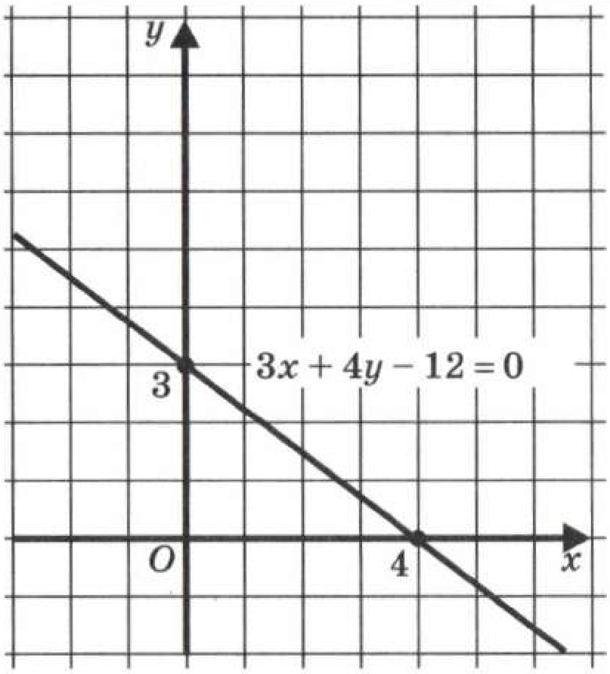
2. Ике үзгәрешлеле тигезләмәнең графигы

Әйтик, $p(x; y) = 0$ тигезләмәсе бирелгән булсын. xOy координаталар яссылыгында $p(x; y)$ тигезләмәсенең чишелеше булган $(x; y)$ нокталары күплеген *тигезләмәнең графигы* дип атыйлар.

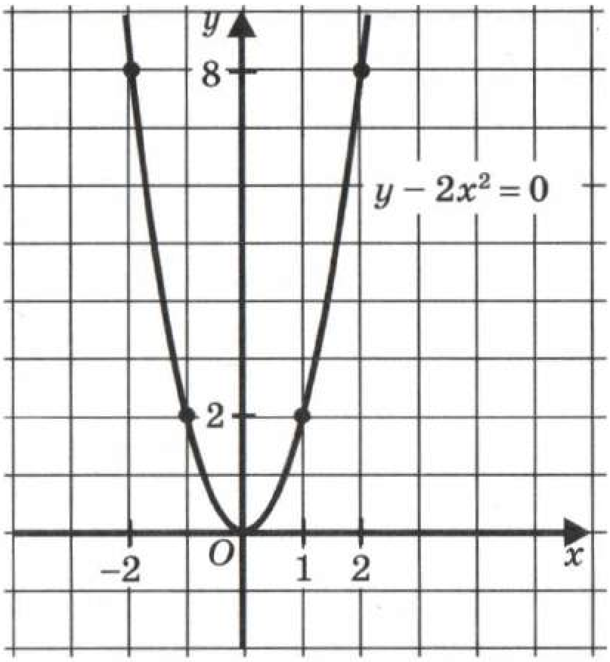
7 нче мисал. Тигезләмәнең графигын төзергә:

$$3x + 4y - 12 = 0. \qquad (1)$$

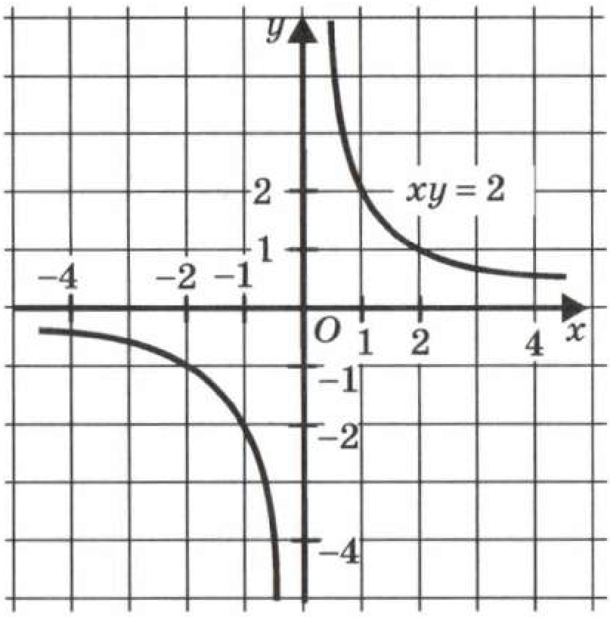
Чишү. 7 нче сыйныф алгебра курсыннан ике үзгәрешлеле $ax + by + c = 0$ сызыкча тигезләмәсе графигының туры сызык булуын сез инде беләсез (биредә a, b саннарының кимендә берсе нульгә тигез түгел). Димәк, (1) тигезләмәсе графигы – туры, һәм аны төзү өчен аның өстендә ятучы ике ноктаны күрсәтү җитә. Әгәр (1) тигезләмәгә $x = 0$ не куйсак, ул $4y - 12 = 0$ рәвешен ала, һәм аннан $y = 3$ не табабыз; димәк, (0; 3) – координаталары (1)



Рәс. 52



Рәс. 53



Рәс. 54

тигезләмәне канәгатьләндерә торган нокта. Әгәр (1) тигезләмәгә $y = 0$ не куйсак, ул $3x - 12 = 0$ рәвешен ала; биредә $x = 4$ була, һәм (4; 0) ноктасының координаталары да (1) тигезләмәсен канәгатьләндерә.

(0; 3) һәм (4; 0) нокталары аша туры үткәрәбез, ул (1) тигезләмәсенең графигы була (52 нче рәсем). ■

Әгәр $p(x; y)$ тигезләмәсен $y = f(x)$ рәвешенә китерү мөмкин булса, $f(x)$ функциясенең графигы бер үк вакытта $p(x; y) = 0$ тигезләмәсенең дә графигы булып тора.

8 нче мисал. $y - 2x^2 = 0$ тигезләмәсенең графигын төзергә.

Чишү. Тигезләмәне $y = 2x^2$ рәвешенә китерәбез. $2x^2$ функциясенең графигы парабола була (53 нче рәсем).

9 нчы мисал. $xy = 2$ тигезләмәсенең графигын төзергә.

Чишү. Тигезләмәне $y = \frac{2}{x}$ рәвешенә китерәбез. $y = \frac{2}{x}$ функциясенең графигы гипербола була (54 нче рәсем).

3. Координаталар яссылыгындагы ике нокта арасындагы ераклык. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ тигезләмәсенең графигы

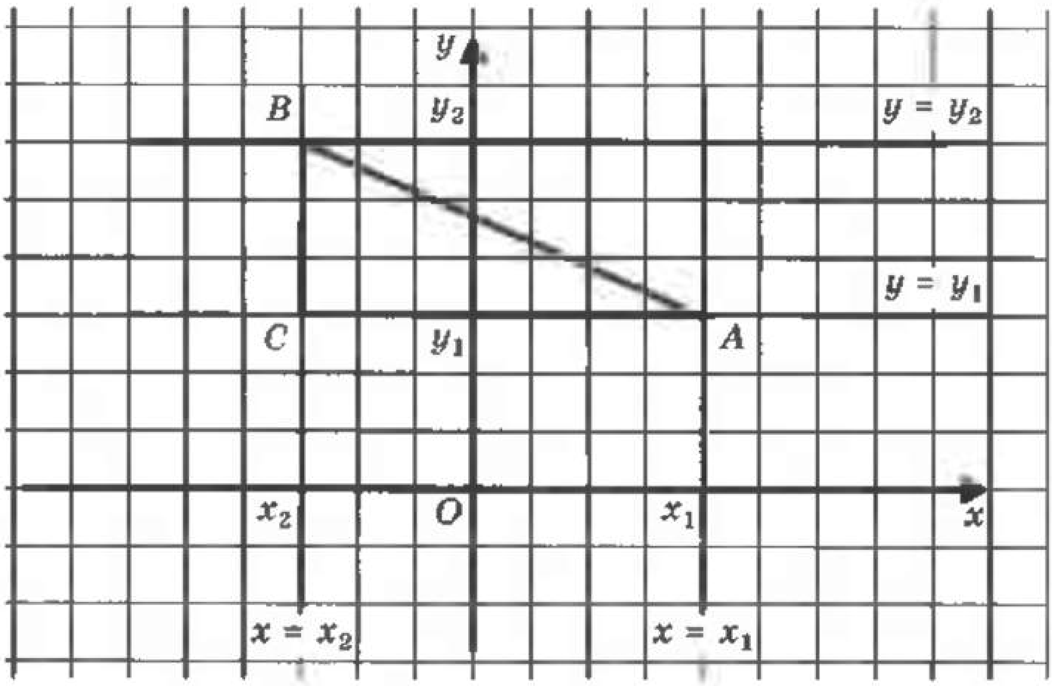
7–9 нчы мисалларда тигезләмә графикларын төзегәндә, без үзебезгә 7–8 нче сыйныф алгебра курсыннан билгеле булган материалга таяндык: графиклар булып туры, парабола, гипербола торды. Бу пунктта без ике үзгәрешлеле тигезләмәләрнең графигы булып торучы геометрик фигураларның яңа төрләрен өйрәнербез.

1 нче теорема

xOy координаталар яссылыгында A $(x_1; y_1)$ һәм B $(x_2; y_2)$ нокталары арасындагы ераклык

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

формуласы буенча исәпләнә.



Рәс. 55

Исбатлау. $A\ (x_1;\ y_1)$ һәм $B\ (x_2;\ y_2)$ нокталарын кисемтә белән тоташтырабыз һәм $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ турыларын үткәрәбез (55 нче рәсем). Турыпочмаклы ABC өчпочмагын карыйк. AC катеты озынлыгы x күчәренең x_1 һәм x_2 нокталары арасындагы ераклыкка тигез, ягъни $AC = |x_2 - x_1|$. BC катеты озынлыгы y күчәренең y_1 һәм y_2 нокталары арасындагы ераклыкка, ягъни $BC = |y_2 - y_1|$ гә тигез. Пифагор теоремасы буенча $AB^2 = AC^2 + BC^2$, ягъни

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2. \qquad (2)$$

$|a|^2 = a^2$ булганлыктан (2) формуланы болай үзгәртеп була:

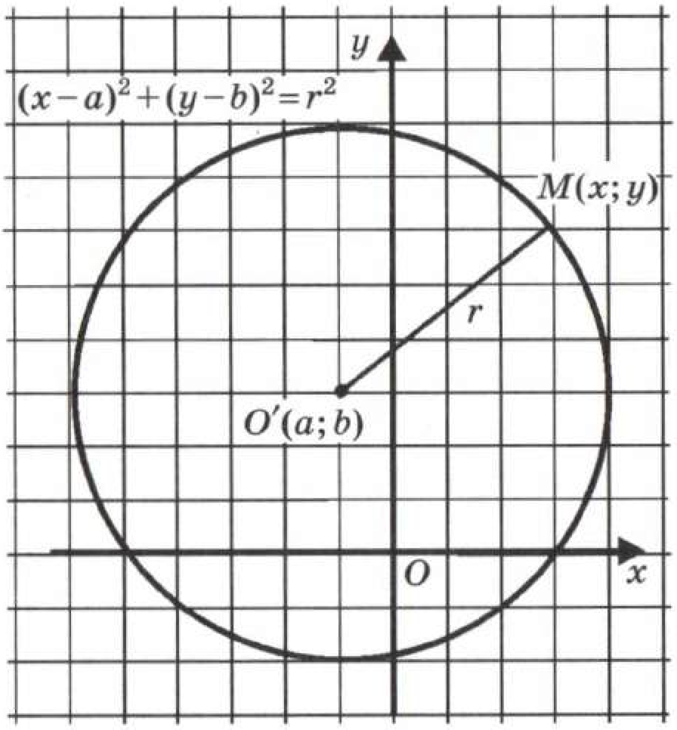
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Димәк, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Теорема исбатланды.

Мәсәлән, (9; −1) һәм (2; −25) нокталары арасындагы ераклыкны исәплик. Табабыз: $\sqrt{(2-9)^2 + (-25+1)^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25.$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (3)$$

2 нче теорема ***тигезләмәсенең графигы булып, xOy координаталар яссылыгында үзәге O′ (a; b) ноктасында һәм радиусы r(r > 0) булган әйләнә тора*** (56 нчы рәсем).



Рәс. 56

Исбатлау. Әйләнәнең теләсә кайсы $M(x;\ y)$ ноктасын алыйк. 1 нче теорема буенча, $O'M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Ләкин $O'M = r$, димәк, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, ягъни

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Шулай итеп, әйләнәдә ятучы теләсә нинди $M(x;\ y)$ ноктасының координаталары (3) тигезләмәне канәгатьләндерәләр.

Әгәр $P(x;\ y)$ ноктасы әйләнәдә ятмаса, йә $O'P < r$ (P ноктасы әйләнәнең эчендә ятса), йә $O'P > r$ (P ноктасы әйләнәнең тышында ятса) була. Ике очракта да P ноктасы координаталары (3) тигезләмәне канәгатьләндерми.

Димәк, әйләнәнең нокталары һәм бары тик алар гына (3) тигезләмәне канәгатьләндерәләр. Теорема исбатланды.

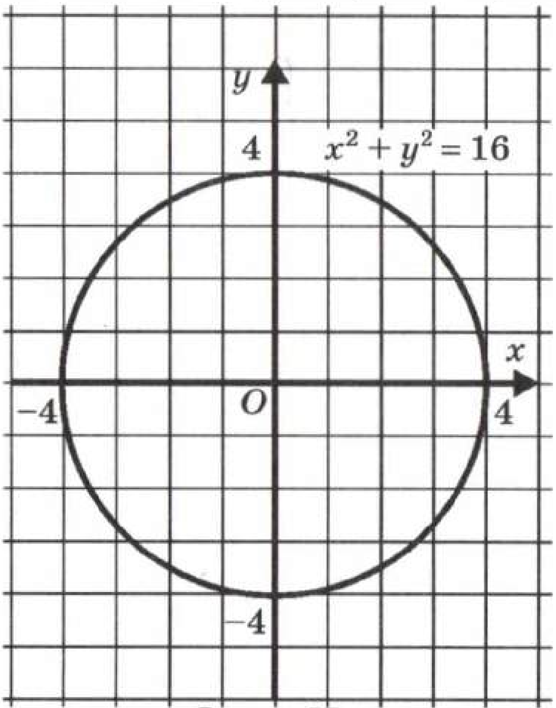
10 нчы мисал. $x^2 + y^2 = 16$ тигезләмәсенең графигын төзергә.

Чишү. Тигезләмәне $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$ рәвешендә язабыз. 2 нче теорема буенча бу тигезләмәнең графигы булып үзәге $O(0;\ 0)$ ноктасында һәм радиусы 4 булган әйләнә тора (57 нче рәсем).

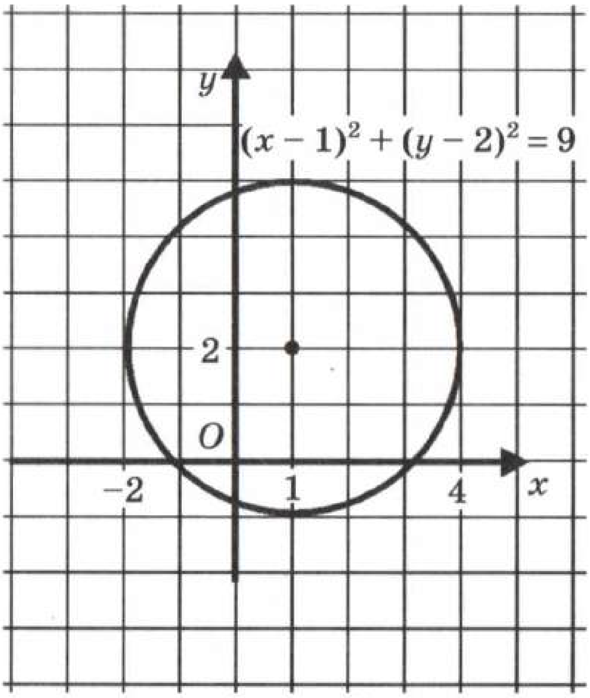
11 нче мисал. Тигезләмәнең графигын төзергә:

а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Чишү. а) Тигезләмәне $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ рәвешенә китерәбез. 2 нче теорема буенча, бу тигезләмәнең графигы – үзәге (1; 2) ноктасында һәм радиусы 3 булган әйләнә (58 нче рәсем).



Рәс. 57



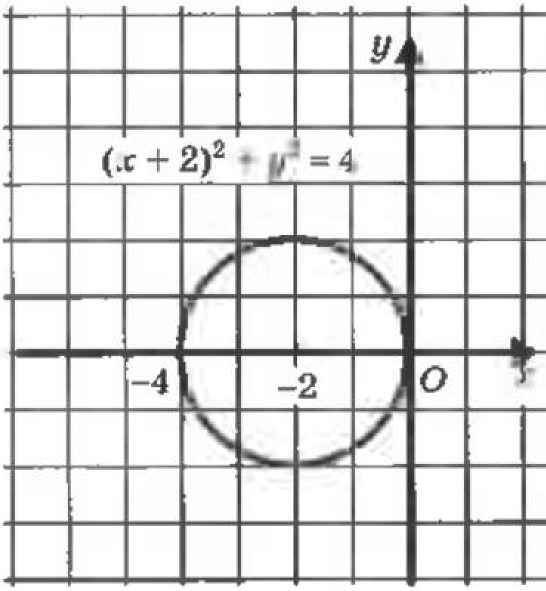
Рәс. 58

б) Тигезләмәне $(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 4$ рәвешенә китерәбез, ягъни

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4 \text{ һәм}$$

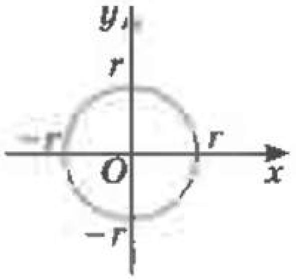
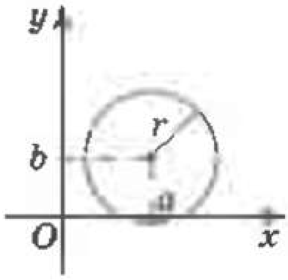
$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = 2^2.$$

2 нче теорема буенча, бу тигезләмәнең графигы – үзәге (−2; 0) ноктасында һәм радиусы 2 булган әйләнә (59 нчы рәсем). ■



Рәс. 59

Бу пунктның төп нәтиҗәләрен таблицада күрсәтәбез.

Аналитик модель	Геометрик модель	Сүзләр белән бирелгән модель
$x^2 + y^2 = r^2$		Координаталар яссылыгында үзәге координаталар башында һәм радиусы r булган әйләнә
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$		Координаталар яссылыгында үзәге (a; b) ноктасында һәм радиусы r булган әйләнә

4. Ике үзгәрешлеле тигезләмә системалары

4 нче билгеләмә. Әгәр бер үк вакытта $p(x; y) = 0$ тигезләмәсен һәм $q(x; y) = 0$ тигезләмәсен дә канәгатьләндерә торган барлык $(x; y)$ саннар парларын табу мәсьәләсе куелса, күрсәтелгән тигезләмәләр **тигезләмә системасын** барлыкка китерә, диләр:

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Бер үк вакытта беренче һәм икенче тигезләмәләрне, канәгатьләндерә торган $(x; y)$ саннар парын **тигезләмә системасының чишелеше** дип атыйлар. *Тигезләмә системасын чишү* – аның барлык чишелешләрен табу яисә чишелешләре юклыгын ачыклау дигән сүз.

Мәсәлән, (3; 7) пары түбәндәге тигезләмә системасының чишелеше:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ y - x = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Чынлап та, бу пар системаның беренче тигезләмәсен дә, икенчесен дә канәгатьләндерә, димәк, аның чишелеше була. Гадәттә болай язалар: (3; 7) – системаның чишелеше, яки

$\begin{cases} x = 3, \\ y = 7 \end{cases}$ – системаның чишелеше.

Ә (5; 9) пары (1) системаның чишелеше түгел; ул беренче тигезләмәне канәгатьләндерми (системаның икенче тигезләмәсен канәгатьләндерсә дә).

Билгеле, тигезләмә системасын төзүче тигезләмәселәрдә үзгәрешлеләр башка хәрефләр, мәсәлән, латин алфавитының a һәм b, s һәм t, u һәм v һ. б. хәрефләре белән билгеләнә ала. Тик һәр очракта җавапта саннар парын язу өчен *лексикография алымын* кулланалар, ягъни беренче урынга алфавитта алдарак торган хәрефне куялар.

Кайвакыт тигезләмә системасын *график юл* белән дә чишәргә мөмкин була. Ул түбәндәгечә эшләнә: беренче тигезләмәнең графигы төзелә, икенчесенең графигы төзелә һәм аларның кисешмәнокталары табыла; һәр кисешмәноктасының координатасы тигезләмә системасының чишелеше булып тора.

12 нче мисал. Тигезләмә системасын чишәргә:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Чишү. 1) $x^2 + y^2 = 16$ тигезләмәсенең графигын – үзәге координаталар башында һәм радиусы 4 булган әйләнә төзибез (60 нчы рәсем).

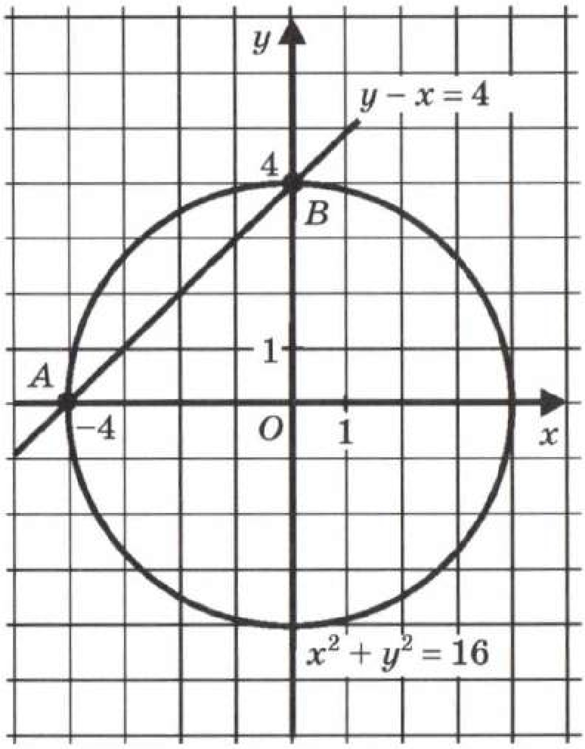
2) $y - x = 4$ тигезләмәсенең графигын төзибез. Ул (0; 4) һәм (–4; 0) нокталары аша узучы туры (60 нчы рәсем).

3) Әйләнә һәм туры A һәм B нокталарында кисешә. Төзелгән геометрик модель буенча A ноктасының координаталары (–4; 0), ә B ноктасыныкы – (0; 4). Тикшереп карап, (–4; 0) һәм (0; 4) парларының ике тигезләмәнең дә, димәк, системаның да чишелеше икәненә ышанабыз. Шулай итеп, бирелгән тигезләмә системасының ике чишелеше бар: (–4; 0) һәм (0; 4).

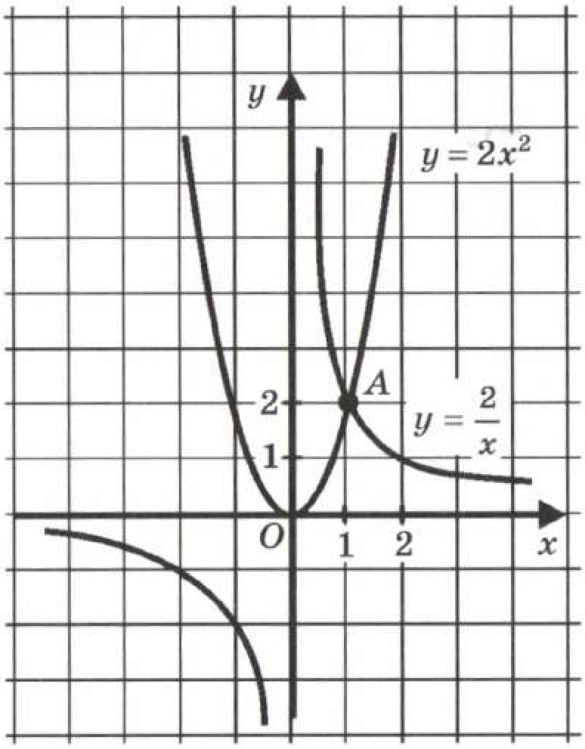
Җавап: (–4; 0); (0; 4).

13 нче мисал. Тигезләмә системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$



Рәс. 60



Рәс. 61

Чишү. 1) Системаның беренче тигезләмәсен $y = 2x^2$ рәвешендә язып, бу тигезләмә графигының парабола икәнен ачыклыйбыз (61 нче рәсем).

2) Системаның икенче тигезләмәсен $y = \frac{2}{x}$ рәвешендә язып, бу тигезләмә графигының гипербола икәнен беләбез (61 нче рәсем).

3) Парабола һәм гипербола A ноктасында кисешәләр. Кисешү ноктасы берәү генә, чөнки параболаның уң тармагы – үсә баручы функция графигы, ә гиперболаның уң тармагы кими баручы функция графигы булып тора. Без төзегән геометрик модельдә A ноктасының координаталары – (1; 2) пары. Тикшереп карап, чынлап та (1; 2) парының системадагы ике тигезләмәнең дә чишелеше, димәк, системаның да чишелеше икәнен күрәбез. Димәк, бирелгән тигезләмә системасының бер чишелеше бар: (1; 2).

Җавап: (1; 2).

Тигезләмә системасын чишүнең график юлы, бик матур тоелса да, ышанычлы түгел. Беренчедән, тигезләмәләрнең графикларын без һәр очракта да төзи алмыйбыз. Икенчедән, графикларны төзесәк тә, кисешмәснокталары махсус сайланган 12 нче һәм 13 нче мисаллардагы кебек «әйбәт» булмаска мөмкиннәр, кайвакыт алар сызымга керми дә калалар. Димәк, безгә ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишүнең ышанычлы алгебраик юлларын табарга кирәк. Аерым алганда, 13 нче мисалны алыштырып куеп та чишәргә мөмкин иде. Беренче тигезләмәдән $y = 2x^2$ ны табабыз. $2x^2$ ны y урынына икенче тигезләмәгә куеп табабыз: $x \cdot 2x^2 = 2$; $2x^3 = 2$; $x^3 = 1$; $x = 1$. Әгәр $x = 1$ булса, $y = 2x^2$ формуласыннан $y = 2$ не табабыз. (1; 2) – системаның чишелеше.

Киләсе параграфта тигезләмә системаларын чишү юллары турында иркенрәк сөйләшербез.

5. Ике үзгәрешлеле тигезсезлекләр һәм тигезсезлек системалары

Бу пунктта без $p(x; y) > 0$ ($p(x; y) < 0$), биредә $p(x; y)$ – алгебраик аңлатма рәвешендәге тигезсезлекләр турында сөйләшербез.

<u>5 нче билгеләмә.</u> **$p(x; y) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше** дип, бу тигезсезлекне канәгатьләндерә торган, ягъни үзгәрешлеләр

кергән $p(x; y) > 0$ тигезсезлеген дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерә торган $(x; y)$ саннар парларын атыйлар.

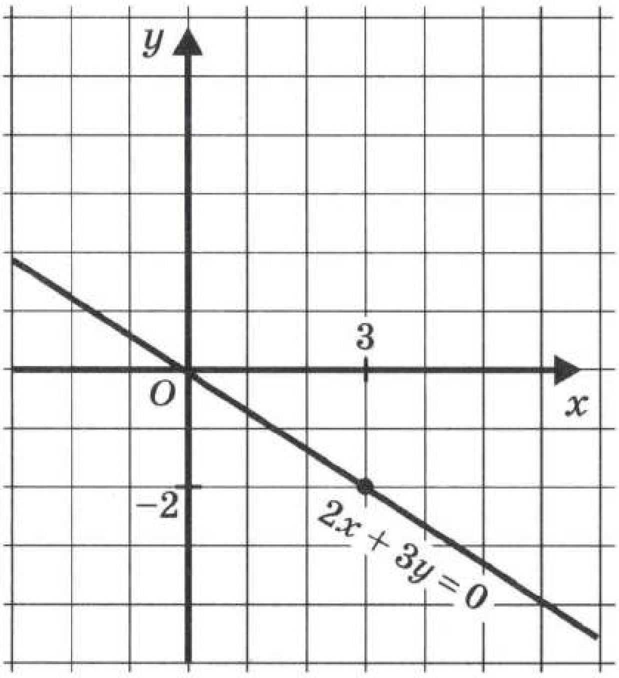
Мәсәлән, $(2; 1)$ пары $2x + 3y > 0$ тигезсезлегенең чишелеше ($2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 > 0$ – дөрес санлы тигезсезлек), ә $(0; -1)$ пары бу тигезсезлегенең чишелеше түгел (тикшерегез!).

Ике үзгәрешлеле тигезсезлекнең барлык чишелешләрен табу өчен еш кына $p(x; y) = 0$ тигезләмәсенең графигына таяналар. Моны мисалларда карап үтәрбез.

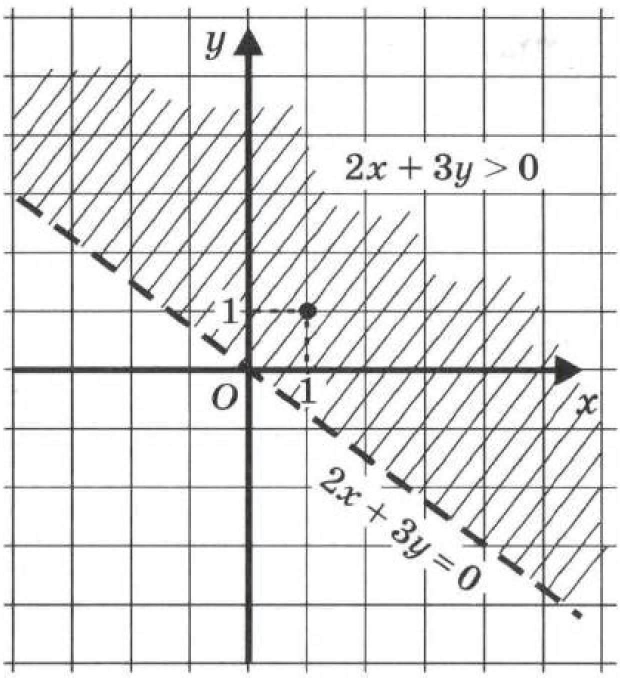
14 нче мисал. $2x + 3y > 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $2x + 3y = 0$ тигезләмәсенең графигы – координаталар башы һәм, мәсәлән, $(3; -2)$ ноктасы аша үтә торган туры (ике ноктаның да координаталары $2x + 3y = 0$ тигезләмәсен канәгатьләндерәләр). Бу туры 62 нче рәсемдә күрсәтелгән. Бирелгән тигезсезлекне $y > -\frac{2}{3}x$ рәвешенә китерәбез. Хәзер исә безне координаталар яссылыгының бу турыдан өстә ятучы нокталар кызыксындырганы ачык күренә. Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекнең барлык чишелешләре геометрик яктан $2x + 3y = 0$ турысыннан өстәрәк ятучы ярымъяссылык нокталары белән сурәтләнә (63 нче рәсем). ◼

Практик киңәш. Тигезләмәнең графигын төзегәч, болай фикер йөртергә мөмкин иде: бирелгән тигезсезлекнең чишелешләре



Рәс. 62



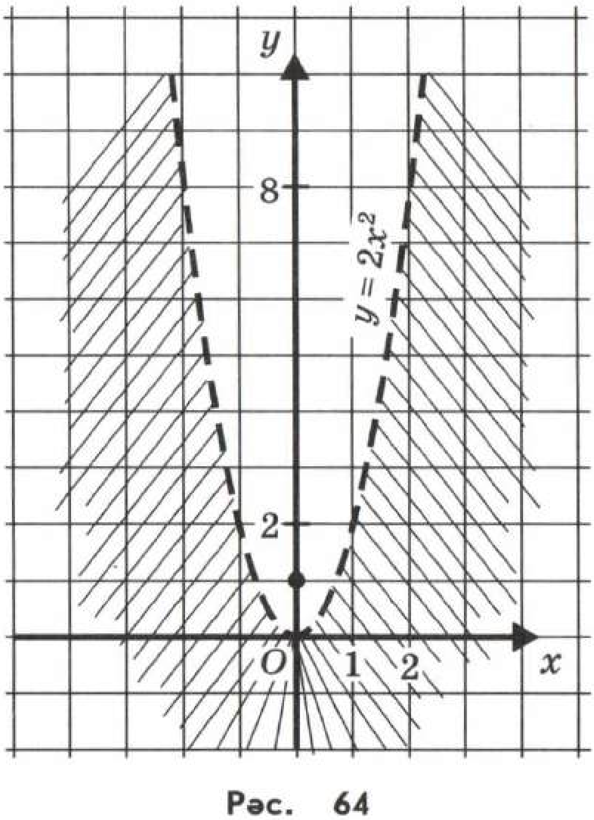
Рәс. 63

төзелгән турыдан йә өстәрәк, йә астарак урнашкан ярымъяссылык нокталары белән сурәтләнә. Кирәкле ярымъяссылыкны сайлап алу өчен, алардан теләсә кайсы бер нокта алабыз һәм аның координаталарын бирелгән тигезсезлеккә куеп карыйбыз. Әгәр дөрес санлы тигезсезлек килеп чыкса, ярымъяссылык дөрес сайланган дигән сүз, дөрес булмаса – ялгыш сайланган.

Тикшерү ноктасы сыйфатында өске ярымъяссылыктан (1; 1) ноктасын алып, аның координаталарын бирелгән тигезсезлеккә куеп карыйбыз. Дөрес санлы тигезсезлек табабыз: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 > 0$. Димәк, бирелгән тигезсезлек чишелешенең геометрик моделе булып $2x + 3y = 0$ турысыннан өстәрәк урнашкан ярымъяссылык тора (63 нче рәсем). Нәтиҗәне башкачарак та әйтергә мөмкин: 63 нче рәсемдә штрихланган күплекнең теләсә кайсы ноктасы координаталары $2x + 3y > 0$ тигезсезлегенең чишелеше булып торган саннар парын төзи.

15 нче мисал. $y - 2x^2 < 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $y - 2x^2 = 0$ тигезләмәсенең графигы булып $y = 2x^2$ параболасы тора (64 нче рәсем). Ул координаталар яссылыгын ике өлешкә бүлә: берсе параболадан өстәрәк, икенчесе астарак урнаш-



Рәс. 64

кан. Тикшерү ноктасы сыйфатында параболадан өстәрәк урнашкан (0; 1) ноктасын алабыз. Бу ноктаның координаталарын бирелгән тигезсезлеккә куеп, дөрес булмаган санлы тигезсезлек $1 - 2 \cdot 0^2 < 0$ табабыз. Димәк, бирелгән тигезсезлек чишелешләренең геометрик моделе сыйфатында координаталар яссылыгының параболадан астарак урнашкан өлешен алырга кирәк (64 нче рәсем). ■

6 нчы билгеләмә. Әгәр бер үк вакытта $p(x; y) > 0$ һәм $q(x; y) > 0$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерә торган барлык $(x; y)$ саннар парларын табу мәсьәләсе куелса, бирелгән тигезсезлекләр тигезсезлек системаларын төзи диләр:

$$\begin{cases} p(x; y) > 0, \\ q(x; y) > 0. \end{cases}$$

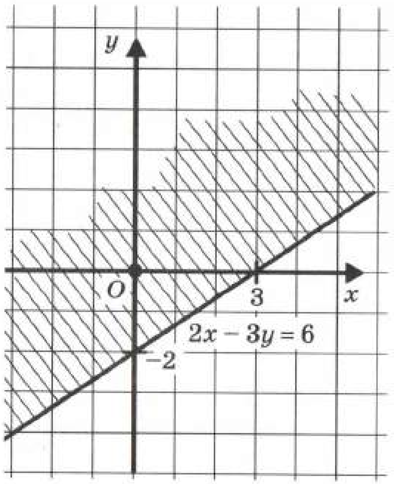
Бер үк вакытта системаның беренче һәм икенче тигезсезлекләрен канәгатьләндерә торган $(x; y)$ саннар парын **тигезсезлек системасының чишелеше** дип атыйлар. Тигезсезлек системасын чишү – аның барлык чишелешләрен табу (яки чишелешләре юк икәнен ачыклау) дигән сүз.

16 нчы мисал. Тигезсезлек системасын чишәргә: $\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 6, \\ x + y + 7 \geqslant 0. \end{cases}$

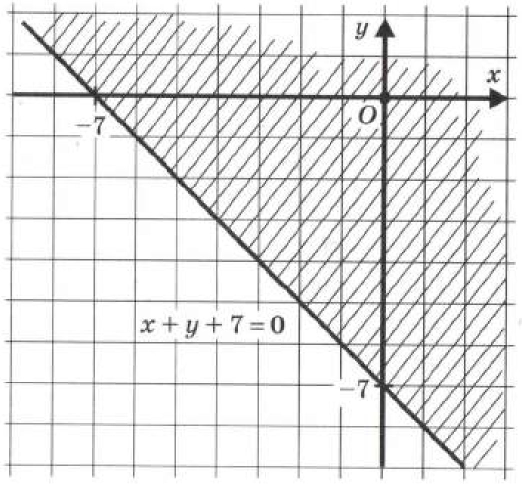
Чишү. 1) $2x - 3y = 6$ тигезләмәсенең графигын төзибез. Ул (3; 0) һәм (0; −2) ноктaлары аша үтүче туры була. Тикшерү ноктасы итеп төзелгән турыдан өстәрәк урнашкан (0; 0) ноктасын сайлыйбыз; аның координаталары $2x - 3y \leqslant 6$ тигезсезлеген канәгатьләндерә. Димәк, системадагы беренче тигезсезлекнең геометрик чишелеше – турыдан өстәрәк урнашкан ярымъяссылык һәм бу туры үзе (чөнки бирелгән тигезсезлек катгый түгел) (рәс. 65.).

2) $x + y + 7 = 0$ тигезләмәсе графигын төзибез. Ул (−7; 0) һәм (0; 7) нокталары аша үтүче туры. Тикшерү ноктасы итеп төзелгән турыдан өстәрәк ятучы (0; 0) ноктасын алабыз; аның координаталары $x + y + 7 \geqslant 0$ тигезсезлеген канәгатьләндерә. Димәк, бирелгән системада икенче тигезсезлекнең геометрик чишелеше – турыдан өстәрәк урнашкан ярымъяссылык һәм бу туры үзе (66 нчы рәсем).

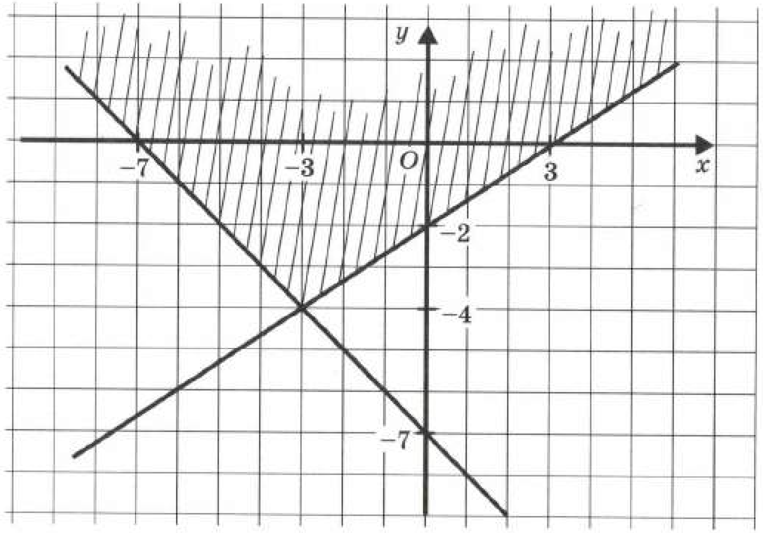
3) Бирелгән тигезсезлек системасының чишелеше сыйфатында төзелгән ярымъяссылыкларның барлык уртак нокталары, ягъни аларның кисешмәсе алына (67 нче рәсемдә штрихланган). ■



Рәс. 65



Рәс. 66



Рәс. 67

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нәрсә ул ике үзгәрешлеле рациональ тигезләмә?

2. Ике үзгәрешлеле рациональ тигезләмәнең чишелеше дип нәрсәне атыйлар?

3. Тигезләмәгә өч чишелеш сайлап табыгыз:
а) $2x + 3y = 6$; б) $x^2 + y^2 = 25$.

4. $p(x; y) = 0$ тигезләмәсенең графигы дип нәрсәне атыйлар?

5. $2x + 3y = 6$ тигезләмәсенең графигы нидән гыйбарәт? Бу графикны төзегез.

6. xOy координаталар яссылыгында $(x_1; y_1)$ һәм $(x_2; y_2)$ нокталары арасындагы ераклык формуласын языгыз.

7. Координаталар яссылыгында ноктадар арасындагы ераклыкны табыгыз:
а) (2; 3) һәм (1; 5); б) (0; 8) һәм (−3; 4); в) (2; −7) һәм (−1; −5).

8. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ тигезләмәсенең графигы нидән гыйбарәт?

9. Радиусы 2 гә тигез һәм үзәге түбәндәге нокта булган әйләнә тигезләмәсен языгыз:
а) (0; 0); б) (1; −2); в) (0; 4).

10. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы нәрсә ул?

11. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасының чишелеше дип нәрсәне атыйлар?

12. Тигезләмәләр системасы бирелгән: $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ Кайсы саннар парлары аның чишелеше булып тора:
а) (5; 0); б) (2; 1); в) (3; 4); г) (1; 2); д) (−1; 2)?

13. Түбәндәге тигезләмә системасын график юл белән ничек чишәргә кирәклеге турында сөйләгез: $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

14. Тигезләмәләр системасын график юл белән чишегез: $\begin{cases} y = x, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

15. $p(x; y) > 0$ тигезсезлегенең чишелеше дип нәрсәне атыйлар?

16. Тигезсезлекнең өч чишелешен сайлап языгыз:
а) $2x + 3y > 6$; б) $x^2 + y^2 < 25$.

17. xOy координаталар системасында түбәндәге тигезсезлекне канәгатьләндерә торган ноктадар күплеген төзегез:
а) $x^2 + y^2 < 25$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 25$; в) $x^2 + y^2 > 25$.

§ 6. ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАЛАРЫН ЧИШҮ ЮЛЛАРЫ

Бу параграфта без тигезләмә системаларын чишүнең график юлына караганда ышанычлырак саналган өч алымын, ягъни өч юлын карап үтәрбез.

1. Алыштырып кую юлы

Бу алымны без 7 нче сыйныфта сызыкча тигезсезлекләр чишү өчен кулландык. 7 нче сыйныфта эшләнгән алгоритм ике үзгәрешлеле (x һәм y урынында башка хәрефләр дә торырга мөмкин) теләсә нинди ике тигезләмә (сызыкча булуы мәҗбүри түгел) системасын чишү өчен дә яраклы. Алдагы параграфның 13 нче мисалында без бу алгоритмнан файдаландык та инде.

Ике x; y үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә алыштырып кую юлын куллану алгоритмы

1. Системаның бер тигезләмәсендә y ны x аша күрсәтергә.
2. Килеп чыккан аңлатманы икенче тигезләмәдә y урынына куярга.
3. Табылган тигезләмәне x ка карата чишәргә.
4. Өченче адымда табылган тамырларның һәркайсын беренче адымда табылган y аңлатмасындагы x урынына куярга.
5. Өченче һәм дүртенче адымда табылган тәртиптә, җавапны (x; y) парлары рәвешендә язарга.

Билгеле инде, x һәм y үзгәрешлеләре тигез хокуклы, шунлыктан алгоритмның беренче адымында y ны x аша түгел, ә x ны y аша күрсәтергә дә мөмкин. Гадәттә гадирәк тигезләмә сайлап алына һәм анда да уңайлырак алыштыру кулланыла.

1 нче мисал. Тигезләмә системасын чишәргә:

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Чишү. 1) Системаның беренче тигезләмәсендә x ны y аша күрсәтәбез: $x = 5 - 3y$.

2) Табылган аңлатманы икенче тигезләмәгә x урынына куябыз: $(5 - 3y)y = 2$.

3) Табылган тигезләмәне чишәбез:

$$5y - 3y^2 = 2;$$

$$3y^2 - 5y + 2 = 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{2}{3}.$$

4) y ның табылган кыйммәтләрен бер-бер артлы $x = 5 - 3y$ формуласына куябыз. Әгәр $y = 1$ булса, $x = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3$; әгәр $y = \frac{2}{3}$ булса, $x = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3$.

5) $(2; 1)$ һәм $\left(3; \frac{2}{3}\right)$ парлары – бирелгән тигезләмә системасының чишелешләре.

Җавап: $(2; 1)$; $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

2. Алгебраик кушу юлы

Бу алым да сезгә 7 нче сыйныф алгебра курсыннан таныш – аны сызыкча тигезләмәләр чишүдә кулланган идек. Аның асылын алдагы мисалда искә төшерик.

2 нче мисал. Тигезләмә системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Чишү. Системаның беренче тигезләмәсендә барлык буыннарны 3 кә тапкырлыйбыз, икенче тигезләмәне үзгәрешсез калдырабыз:

$$\begin{cases} 6x + 3xy + 6 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Системаның икенче тигезләмәсен беренчесеннән алабыз:

$$(6x + 3xy + 6) - (4y + 3xy + 30) = 0 - 0;$$

$$6x - 4y - 24 = 0;$$

$$3x - 2y - 12 = 0.$$

Бирелгән системаның ике тигезләмәсен алгебраик кушу нәтиҗәсендә беренче һәм икенче тигезләмәләрдән күпкә гадирәк тигезләмә килеп чыкты. Әлеге гади тигезләмә белән системаның теләсә кайсы тигезләмәсен, мәсәлән, икенчесен алыштырабыз. Ул чагында тигезләмә системасы гадирәк система белән алыштырыла:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 3x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Бу системаны алыштыру урынына кую юлы белән чишәргә мөмкин. Икенче тигезләмәдән $y = \frac{3x - 12}{2}$ не табып, аны системаның беренче тигезләмәсенә y урынына куябыз:

$$2x + x \cdot \frac{3x - 12}{2} + 2 = 0;$$

$$4x + 3x^2 - 12x + 4 = 0;$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

x ның табылган кыйммәтләрен $y = \frac{3x - 12}{2}$ формуласына куясы калды. Әгәр $x = 2$ булса, $y = \frac{3 \cdot 2 - 12}{2} = -3$; ; әгәр $x = \frac{2}{3}$ булса,

$$y = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 12}{2} = -5.$$

Шулай итеп, без системаның ике чишелешен таптык: $(2; -3)$ һәм $\left(\frac{2}{3}; -5\right)$.

Җавап: $(2; -3)$; $\left(\frac{2}{3}; -5\right)$.

3. Яңа үзгәрешләр кертү юлы

Тигезләмәләр чишкәндә яңа үзгәрешле кертү юлы белән сез 8 нче сыйныфның алгебра курсында танышкан идегез. Тигезләмә системаларын чишкәндә дә бу алымның асылы үзгәрми, әмма техник яктан аерым үзенчәлекләре бар, аларны 3 нче һәм 4 нче мисалларда карап үтәрбез.

3 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Чишү. Яңа үзгәрешле $t = \frac{x}{y}$ кертәбез. Ул вакытта системаның беренче тигезләмәсен гадирәк итеп язып була: $t + \frac{1}{t} = 2{,}5$. Бу тигезләмәне t үзгәрешлесенә карата чишәбез:

$$t^{|2t} + \frac{1^{|2}}{t} - \frac{5^{|t}}{2} = 0;$$

$$\frac{2t^2 + 2 - 5t}{2t} = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Бу ике кыйммәт тә $2t \neq 0$ шартын канәгатьләндерә, шунлыктан t үзгәрешлесе кергән тигезләмәнең тамырлары булып торалар.

Ләкин $t = \frac{x}{y}$, димәк, йә $\frac{x}{y} = 2$, моннан $x = 2y$, йә $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, моннан $y = 2x$.

Шулай итеп, яңа үзгәрешле кертү юлы белән без системаның беренче тигезләмәсен ике гади тигезләмәгә «бүлгәли» алдык:

$$x = 2y; \quad y = 2x.$$

Моннан соң нишләргә? Табылган ике гади тигезләмәнең һәркайсын моңарчы кулланылмаган $x^2 - y^2 = 3$ тигезләмәсе белән бер системада тикшерергә кирәк булачак. Башкача әйтсәк, мәсьәлә ике тигезләмә системасын чишүгә кайтып кала:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Беренче системаның, икенче системаның чишелешләрен табарга һәм барлык парларны җавапка кертергә кирәк.

Беренче тигезләмә системасын чишәбез:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Алыштырып кую юлын кулланабыз, чөнки бередә аның өчен бар да әзер: $2y$ аңлатмасын икенче тигезләмәгә x урынына куябыз. Чишәбез:

$$(2y)^2 - y^2 = 3;$$
$$4y^2 - y^2 = 3;$$
$$3y^2 = 3;$$
$$y^2 = 1;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

$x = 2y$ булганлыктан, тиңдәшле рәвештә $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Шуның белән системаның ике чишелешен табабыз: (2; 1) һәм (–2; –1).

Икенче тигезләмә системасын чишәбез:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Тагын бер тапкыр алыштырып кую юлын кулланабыз: $2x$ аңлатмасын икенче тигезләмәгә y урынына куябыз. Чишәбез:

$$x^2 - (2x)^2 = 3;$$
$$x^2 - 4x^2 = 3;$$
$$-3x^2 = 3;$$
$$x^2 = -1.$$

Бу тигезләмәнең тамырлары юк һәм тигезләмә системасының да чишелешләре булмый. Шулай итеп, җавапка беренче системаның гына чишелешләрен кертергә кирәк.

Җавап: (2; 1); (–2; –1).

Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә, яңа үзгәрешлеләр кертү алымы ике вариантта кулланыла. *Беренче вариант:* бер яңа үзгәрешле кертелә һәм ул системаның бер генә

тигезләмәсендә файдаланыла. 3 нче мисалда нәкъ менә шундый очрак каралды. *Икенче вариант:* ике яңа үзгәрешле кертелә һәм алар бер үк вакытта ике тигезләмәдә дә файдаланыла. 4 нче мисалда шундый очрак каралачак.

4 нче мисал. Тигезләмә системасын чишәргә:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2, \\ \dfrac{8}{x-3y} - \dfrac{9}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

Чишү. Ике яңа үзгәрешле кертәбез: $a = \dfrac{2}{x-3y}$, $b = \dfrac{3}{2x+y}$.

Бу вакытта $\dfrac{8}{x-3y} = 4a$, $\dfrac{9}{2x+y} = 3b$.

Бу безгә бирелгән системаны гади генә рәвешкә китерергә мөмкинлек бирә, ләкин үзгәрешлеләр инде башка – a һәм b:

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 4a - 3b = 1. \end{cases}$$

Әлеге системаны чишү өчен, алгебраик кушу юлын кулланабыз:

$$+\begin{cases} 3a + 3b = 6, \\ 4a - 3b = 1; \end{cases}$$

$$7a = 7;$$

$$a = 1.$$

$a = 1$ булганлыктан, $a + b = 2$ тигезләмәсеннән: $1 + b = 2$; $b = 1$. Шулай итеп, a һәм b үзгәрешлеләренә карата без бер чишелеш таптык:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

x һәм y үзгәрешлеләренә кире кайтып, тигезләмә системасын табабыз:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} = 1, \\ \dfrac{3}{2x+y} = 1, \end{cases}$$

ягъни

$$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

Бу системаны чишү өчен, алгебраик кушу юлын кулланабыз:

$$+\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 6x + 3y = 9; \end{cases}$$

$$7x = 11;$$

$$x = \frac{11}{7}.$$

$x = \frac{11}{7}$ булганлыктан, $2x + y = 3$ тигезләмәсеннән табабыз:
$y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot \frac{11}{7} = 3 - \frac{22}{7} = -\frac{1}{7}$.

Шулай итеп, x һәм y үзгәрешлеләренә карата бер чишелеш таптык:

$$\begin{cases} x = \frac{11}{7}, \\ y = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Җавап: $\left(1\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Бу параграфны кыска, әмма шактый ук мөһим теоретик сөйләшү белән тәгәллибез. Сез инде төрле: сызыкча, квадрат, рациональ, иррациональ тигезләмәләр чишү тәҗрибәсе тупладыгыз. Тигезләмә чишүнең төп идеясе – бер тигезләмәдән гадирәк, әмма бирелгәненә тигезкөчле тигезләмәгә күчү. Сез моны беләсез. Алдарак без ике үзгәрешлеле тигезләмәләр өчен тигезкөчлелек төшенчәсен керткән идек. Бу төшенчәне тигезләмә системалары өчен дә кулланалар.

Билгеләмә. x һәм y үзгәрешлеләре кергән ике тигезләмә системасы бер үк чишелешкә ия булсалар яки аларның чишелешләре булмаса, **тигезкөчле** системалар дип атала.

Тигезкөчлелек ягыннан караганда, без бу параграфта өйрәнгән һәр өчбуын алым (алыштырып кую, алгебраик кушу, яңа үзгәрешлеләр кертү юллары) корректлы. Башкача әйтсәк, *бу алымнарны кулланып, без бер тигезләмә системасын аңа тигезкөчле булган гадирәк икенче системага алыштырабыз.*

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә, алыштырып кую юлының асылы турында сөйләгез.

2. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын алыштырып кую юлы белән чишү алгоритмын түбәндәге системаны чишү мисалында аңлатыгыз: $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

3. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә, алгебраик кушу юлының асылы турында сөйләгез.

4. Алгебраик кушу юлын түбәндәге системаны чишү мисалында аңлатыгыз:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 3y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

5. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә, яңа үзгәрешлеләр кертү юлының асылы турында сөйләгез. Ул нинди ике вариантта кулланыла? Аңлату өчен 3 нче һәм 4 нче мисалларда чишелгән системаны кулланыгыз.

6. Нинди очракта ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын тигезкөчле дип атыйлар?

§ 7. РЕАЛЬ ХӘЛЛӘРНЕҢ МАТЕМАТИК МОДЕЛЬЛӘРЕ БУЛАРАК ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАЛАРЫ

Сез беләсез, ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы реаль хәлнең математик моделе була ала. Мондый мәсьәләләр белән сез беренче тапкыр 7 нче сыйныфта очраштыгыз. Дөрес, анда ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасы белән генә очрашкан идегез. Хәзер без катлаулырак системалар да чишәргә өйрәндек, шунлыктан кыенрак мәсьәләләрне дә чишү дә хәлдән килергә тиеш.

1 нче мисал. Район үзәгендә ике кинотеатр – «Факел» һәм «Салют» эшли, беренчесе – 400, икенчесе 600 урынга исәпләнгән. «Салют» кинотеатрының тамаша залында «Факел»дагыдан 4 рәт артыграк һәм һәр рәтендә 5 урын артыграк. Әгәр «Салют»

кинотеатрының һәр рәтендә 25 тән артыграк урын булса, «Факел» кинотеатрында ничә рәт бар?

Чишү. Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x – «Факел» кинотеатрында рәтләр саны, y – «Факел»ның һәр рәтендә урыннар саны булсын. Ул чагында $x + 4$ — «Салют» кинотеатрында рәтләр саны, $y + 5$ – «Салют»ның һәр рәтендә урыннар саны.

Залдагы рәтләр санын һәм рәттәге урыннар санын белгәч, кинотеатрдагы барлык урыннар санын белеп була:

xy – «Факел» кинотеатрында урыннар саны,

$(x + 4)(y + 5)$ – «Салют» кинотеатрында урыннар саны.

Шарт буенча «Факел»да 400 урын, ягъни $xy = 400$, ә «Салют» кинотеатрында 600 урын, ягъни $(x + 4)(y + 5) = 600$.

Шулай итеп, ике үзгәрешлеле тигезләмә системасына кайтып калабыз:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ (x+4)(y+5) = 600, \end{cases} \quad (1)$$

биредә x, y – натураль саннар.

Мәсьәләнең математик моделе төзелде.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Чишәбез:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x + 20 = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x = 580. \end{cases} \quad (2)$$

Алгебраик кушу юлын кулланабыз: икенче тигезләмәдән беренче тигезләмәне алабыз:

$$(xy + 4y + 5x) - xy = 580 - 400;$$

$$4y + 5x = 180.$$

Бу тигезләмәне (2) системасының икенче тигезләмәсе урынына куябыз:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ 4y + 5x = 180. \end{cases} \quad (3)$$

(3) системасы (2) системасыннан күпкә гадирәк, аны алыштырып кую юлы белән чишәбез. (3) системасының икенче тигезләмәсендә y ны x аша күрсәтәбез: $y = \frac{180 - 5x}{4}$. Бу аңлатманы (3) системасының беренче тигезләмәсенә y урынына куябыз:

$$x \cdot \frac{180 - 5x}{4} = 400;$$

$$x(180 - 5x) = 1600;$$

$$5x^2 - 180x + 1600 = 0;$$

$$x^2 - 36x + 320 = 0$$

(алдагы тигезләмәнең һәр ягын буынлап 5 кә бүлдек);

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 16.$$

$y = \frac{180 - 5x}{4}$ булганлыктан: әгәр $x = 20$ булса, $y = 20$, әгәр $x = 16$ булса, $y = 25$.

Шулай итеп, (3) системасының һәм аңа тигезкөчле (1) системасының ике чишелеше бар: (20; 20) һәм (16; 25).

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Системаның табылган чишелешләренә нигезләнеп, без ике мөмкинлекне анализларга тиеш: «Факел» кинотеатрында йә 20 рәт һәм һәр рәттә 20 урын, йә 16 рәт һәм һәр рәттә 25 урын. Беренче мөмкинлектән «Салют» кинотеатрында 24 рәт килеп чыга (шарт буенча анда 4 рәт артык) һәм һәр рәттә 25 урын (шарт буенча аның һәр рәтендә «Факел»дагыдан 5 урынга күбрәк). Бу җавап безне канәгатьләндерми, чөнки шартта «Салют» кинотеатрының һәр рәтендә 25 тән артыграк урын бар диелә. Икенче мөмкинлекне карыйбыз: «Факел»да һәрберсендә 25 урын булган 16 рәт бар. Ул чагында «Салют»та 20 рәт һәм һәркайсында 30 урын килеп чыга. Монысы безгә туры килә.

Шулай итеп, системаның ике чишелешеннән берсен сайлап алабыз: $x = 16$, $y = 25$, димәк «Факел» кинотеатрында 16 рәт бар.

Җавап: 16 рәт.

Чынлыкта бу мәсьәлә сезнең өчен яңа түгел, без аны «Алгебра–8» дәреслегендә башкачарак чишкән идек; мәсьәләнең

моделе булып бер билгесезле рациональ тигезләмә торды. Мондый модельне кыскача сурәтләп карыйк:

x – «Факел» кинотеатрында рәтләр саны,

$\frac{400}{x}$ – «Факел»да һәр рәттәге урыннар саны,

$x + 4$ – «Салют» кинотеатрында рәтләр саны,

$\frac{600}{x+4}$ – «Салют»та һәр рәттәге урыннар саны.

Тигезләмә табабыз: $\frac{600}{x+4} - \frac{400}{x} = 5$. Бу – мәсьәләнең математик моделе.

Мәсьәлә чишүнең ике вариантын чагыштырыйк. Беренче вариантта математик модель катлаулырак иде (тигезләмә системасы), димәк, төзелгән модель белән эшләү катлаулырак булды. Әмма беренче этап җиңелрәк иде – математик модель җиңелрәк һәм тизрәк төзелде. Шулай да эшне беренче этапта – математик модель төзү этабында җиңеләйтү отышлырак санала. Шунлыктан күп очракларда ике үзгәрешле белән эшләүгә өстенлек бирәләр.

2 нче мисал. *B* һәм *C* пристаньнары *A* пристаненнан агым уңаена тиңдәшле рәвештә 30 км һәм 45 км түбәндәрәк урнашканнар (52 нче биттән рәсем 51). Моторлы көймә *A* дан чыгып китеп *C* га җитә һәм, шундук кире борылып, *B* га килә, барлык юлга ул 4 сәг 40 мин вакыт сарыф итә. Икенче очракта шул ук көймә *C* дан кузгала, *A* га җитеп, кире борыла һәм *B* га килеп туктый, барлык юлга 7 сәг вакыт сарыф итә. Көйменең үз тизлеге һәм елганың агым тизлеге нинди?

Чишү. <u>Беренче этап.</u> *Математик модель төзү.* Моны инде алдарак эшләгән идек (§ 5 тәге 1 нче мисал):

$$\begin{cases} \frac{45}{x+y} + \frac{15}{x-y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{45}{x-y} + \frac{30}{x+y} = 7. \end{cases}$$

Биредә x км/сәг – көйменең үз тизлеге, y км/сәг – елганың агым тизлеге.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Тигезләмә системасын чишү өчен, яңа үзгәрешлеләр кертү юлын сайларбыз. Әйтик, $\frac{15}{x+y} = a$, $\frac{15}{x-y} = b$ булсын. Система түбәндәге рәвешкә керә:

$$\begin{cases} 3a + b = \frac{14}{3}, \\ 2a + 3b = 7. \end{cases}$$

Ике a һәм b үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасын чишеп (моны эшләгез!) табабыз: $a = 1$, $b = \frac{5}{3}$.

Шулай итеп,

$$\frac{15}{x+y} = 1, \text{ ягъни } x + y = 15;$$

$$\frac{15}{x-y} = \frac{5}{3}, \text{ ягъни } x - y = 9.$$

Иң гади тигезләмә системасын гына чишәсе калды:

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

$x = 12$, $y = 3$ не табабыз.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Көймәнең акмый торган судагы тизлеге һәм елганың агым тизлеген билгеләргә кирәк. Беренче тизлекне без x хәрефе белән билгеләдек һәм $x = 12$ не таптык; димәк, көймәнең үз тизлеге 12 км/сәг. Елганың агым тизлеген y хәрефе белән билгеләдек. $y = 3$ не таптык, елганың агым тизлеге 3 км/сәг була.

Җавап: 12 км/сәг; 3 км/сәг.

3 нче мисал. Оста һәм аның өйрәнчеге ниндидер эшне бергәләп 6 көндә эшләргә җыенган. Башта өйрәнчек эшли башлый һәм эшнең 20% ын үтәгәч, авырып китә. Калганын оста үзе генә эшләп бетерә. Шуңа күрә барлык эш 11 көнгә сузыла. Барлык эшне оста үзе генә һәм өйрәнчек үзе генә ничә көндә эшләп бетерә алыр иде (көннәр бөтен саннарда алына)?

Чишү. <u>Беренче этап.</u> *Математик модель төзү.*

Әгәр план саннар белән бирелмичә (ягъни ничә деталь эшлисе, ничә куб метр җир казыйсы һ. б. күрсәтелмәгән булса), ниндидер эш дип кенә бирелә икән, эшнең күләмен 1 гә тигез итеп алалар, ә аның өлешләре берәмлекнең өлешләре була.

Әйтик, x – остага барлык эшне үзе генә эшләп бетерү өчен кирәкле вакыт, ә y – өйрәнчеккә кирәкле вакыт. Әгәр барлык эшнең күләмен (ягъни 1) аны эшләп бетерү вакытына бүлсәк, 1 көндә эшнең нинди өлеше үтәлүен беләбез. Шулай итеп, $\frac{1}{x}$ – эшнең 1 көндә оста эшләгән өлеше, $\frac{1}{y}$ – эшнең 1 көндә өйрәнчек эшләгән өлеше.

Шарт буенча, бергәләп эшләсәләр, алар икәүләп йөкләмәне 6 көндә үтәрләр иде. Останың 6 көндә эшләгән өлеше $\frac{1}{x}\cdot 6$ формуласы белән, ягъни $\frac{6}{x}$. Ә өйрәнчекнең 6 көндә эшләгән өлеше — $\frac{1}{y}\cdot 6$ формуласы, ягъни $\frac{6}{y}$ белән билгеләнә.

Бергәләп алар 6 көндә барлык эшне (ягъни 1 не) бетерәләр. Тигезләмә төзибез:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1.$$

Шарт буенча өйрәнчек үзе генә барлык эшнең 20% ын, ягъни $\frac{1}{5}$ ен эшләгән. Ул моңа күпме вакыт сарыф иткән икән? Билгеле инде, аңа барлык эшне эшләр өчен кирәкле вакытның $\frac{1}{5}$ өлеше, ягъни $\frac{1}{5}\cdot y$ көн. Аннан соң оста калган эшне, ягъни аның $\frac{4}{5}$ өлешен эшли һәм $\frac{4}{5}\cdot x$ көн сарыф итә.

Шарт буенча, йөкләмә 11 көндә үтәлгән:

$$\frac{y}{5} + \frac{4x}{5} = 11;$$

$$y + 4x = 55.$$

Шулай итеп, мәсьәләнең математик моделе – ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы төзелде:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1, \\ y + 4x = 55, \end{cases}$$

Биредә x, y – бөтен саннар.

<u>Икенче этап.</u> *Төзелгән модель белән эшләү.*

Алыштырып кую юлын кулланабыз. Системаның икенче тигезләмәсеннән y ны x аша күрсәтәбез: $y = 55 - 4x$. Хәзер $55 - 4x$ аңлатмасын беренче тигезләмәгә y урынына куябыз:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{55 - 4x} = 1. \qquad (4)$$

Рациональ тигезләмәне чишәбез:

$$\frac{6^{|55-4x}}{x} + \frac{6^{|x}}{55 - 4x} - 1^{|x(55-4x)} = 0;$$

$$\frac{6(55-4x) + 6x - x(55-4x)}{x(55-4x)} = 0;$$

$$4x^2 - 73x + 330 = 0;$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = \frac{33}{4}.$$

Табылган ике аңлатма да $x(55-4x) \neq 0$ шартын канәгатьләндерә, ягъни (4) тигезләмәсенең тамырлары булып тора.

y ның тиңдәшле кыйммәтен генә табасы калды. Моның өчен $y = 55 - 4x$ тигезләмәсен кулланабыз. Әгәр $x = 10$ булса, $y = 15$; әгәр $x = \frac{33}{4}$ булса, $y = 22$.

Шулай итеп, тәзелгән тигезләмә системасының ике чишелеше бар:

$$(10;\ 15) \text{ һәм } \left(\frac{33}{4};\ 22\right).$$

Мәсьәләнең шарты буенча, барлык эшне аерым гына оста да, өйрәнчек тә бөтен санлы көннәрдә эшләп бетерә. Димәк, $\left(\frac{33}{4};\ 22\right)$ пары төшеп кала.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Җавап инде табылды: $x = 10$, $y = 15$.

Җавап: 10 көн, 15 көн.

Искәрмә: Игътибар итегез, каралган мәсьәләләрдә төзелгән тигезләмә системаларын чишкәндә, без алда өйрәнгән барлык алымнарны кулландык.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

- Бу бүлектә сез яңа математик модель – ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы белән таныштыгыз, – ул еш кына реаль хәлләрнең математик асылын сурәтләү өчен кулланыла.
- Сез яңа математик төшенчәләр белән таныштыгыз:
  ике үзгәрешлеле тигезләмә (тигезсезлек);
  ике үзгәрешлеле тигезләмәне (тигезсезлекне) чишү;
  ике үзгәрешлеле ике тигезләмә (тигезсезлек) системасы;
  ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишү;
  ике үзгәрешлеле тигезләмәләрнең тигезкөчлелеге, тигезләмә системаларының тигезкөчлелеге.
- Без ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишүнең төрле алымнарын тикшердек:
  график юл;
  алыштырып кую юлы;
  алгебраик кушу юлы;
  яңа үзгәрешлеләр кертү юлы.
- Шуңа игътибар иттек: ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын чишкәндә, яңа үзгәрешлеләр кертү юлы ике вариантта

кулланыла. Беренче вариант: бер яңа үзгәрешле кертелә һәм бары бер тигезләмәдә генә кулланыла. Икенче вариант: ике яңа үзгәрешле кертелә һәм системаның ике тигезләмәсендә дә бер үк вакытта кулланыла.

- Без $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ — xOy координаталар яссылыгында үзәге (a; b) ноктасында урнашкан, радиусы r булган әйләнә тигезләмәсе икәнен исбатладык. Аерым алганда, $x^2+y^2=r^2$ – xOy координаталар яссылыгында үзәге координаталар башында һәм радиусы r булган әйләнә тигезләмәсе.

ТИКШЕРЕНҮ ЭШЛӘРЕ ӨЧЕН ТЕМАЛАР

1. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр һәм тигезсезлекләр.
2. Тигезләмә системаларын алыштырып кую юлы белән чишү.
3. Тигезләмә системаларын алгебраик кушу юлы белән чишү.

3 БҮЛЕК
САНЛЫ ФУНКЦИЯЛӘР

§ 8. *Санлы функциянең билгеләмәсе. Функциянең билгеләнү өлкәсе, кыйммәтләре өлкәсе*
§ 9. *Функцияне бирү юллары*
§ 10. *Функцияләрнең үзлекләре*
§ 11. *Җөп һәм так функцияләр*
§ 12. $y = x^n$ $(n \in N)$ *функцияләре, аларның үзлекләре һәм графиклары*
§ 13. $y = x^{-n}$ $(n \in N)$ *функцияләре, аларның үзлекләре һәм графиклары*
§ 14. $y = \sqrt{x}$ *функциясе, аның үзлекләре һәм графигы*

§ 8. САНЛЫ ФУНКЦИЯНЕҢ БИЛГЕЛӘМӘСЕ. ФУНКЦИЯНЕҢ БИЛГЕЛӘНҮ ӨЛКӘСЕ, КЫЙММӘТЛӘРЕ ӨЛКӘСЕ

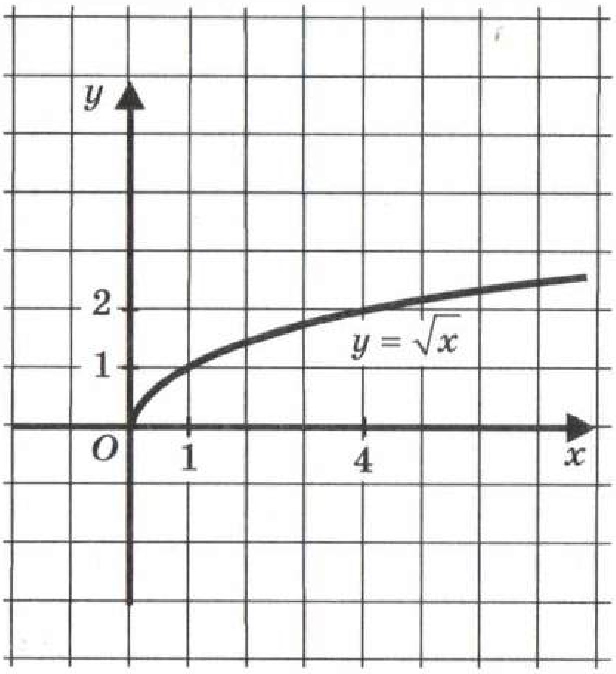
Мәктәптә алгебра курсын ике ел өйрәнү дәверендә «функция» атамасының һәркайда диярлек кулланылуына сез инде күнеккәнсездер. Бу аңлашыла да, чөнки математика математик модельләрне өйрәнә, ә бу модельләрнең күпчелеге ниндидер дәрәҗәдә функцияләр белән бәйләнгән. Математикада шундый закон бар: нинди дә булса атаманы кулланалар икән, аның төгәл билгеләмәсе булырга тиеш. Ике ел эчендә бу законны дәлилли торган бик күп мисаллар булды. Әйтик, 7 нче сыйныфта без «натураль күрсәткечле дәрәҗә» атамасын төгәл билгеләп керттек: «a^n, биредә $n = 2, 3, 4, \ldots$, һәрберсе a га тигез булган n тапкырлаучының тапкырчыгышыннан гыйбарәт; ә a^1 – a санының үзе». 8 нче сыйныфта «тискәре булмаган саннан квадрат тамыр» атамасына төгәл билгеләмә бирдек: «$\sqrt{a}$ – квадраты a га тигез булган тискәре булмаган сан». Моңа охшаш мисалларны сез үзегез дә искә төшерә аласыз.

Шул ук вакытта ниндидер атаманы кертеп, аннан файдалана да башлаган, әмма аның мәгънәсен якынча гына аңлатып, төгәл билгеләмәсен формалаштырмый калдырган очраклар да булды. Аерым алганда, «функция» атамасы белән шулай килеп чыкты. Ни өчен соң 7 нче сыйныфта функция төшенчәсен куллана башлап, әле 8 нче сыйныфта да аңа төгәл билгеләмә бирми калдык, дигән сорау туарга мөмкин.

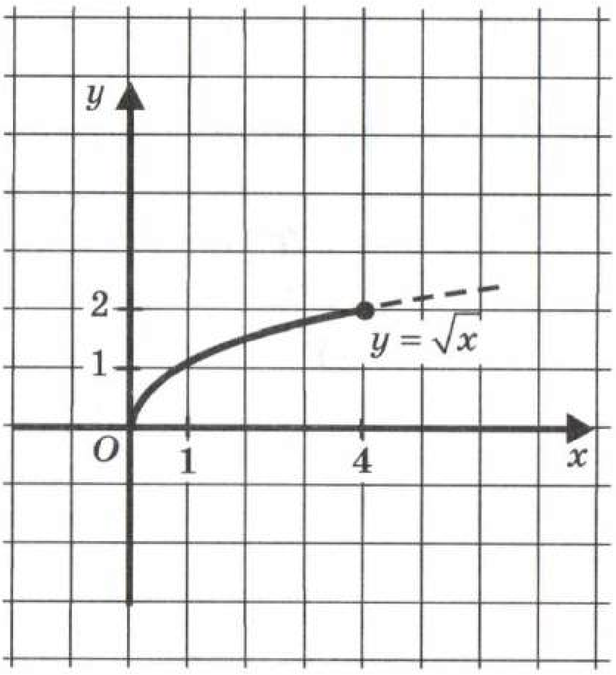
Эш шунда ки, математика фәненең үсеше тарихында кешелек озак вакытлар һәм актив рәвештә эш коралы кебек файдаланган, әмма төгәл билгеләмә бирә алмаган төшенчәләр булган. Теге яки бу төшенчә белән эшләү барышында җитәрлек *тәҗрибә* туплангач кына, математикларда аның формаль билгеләмәсенә *ихтыяҗ* туган. Билгеле, ниндидер төшенчәне беренче тапкыр билгеләргә тырышулар үтә уңышлы да килеп чыкмаган, аларга өстәмәләр ясарга, төзәтергә туры килгән. Функция төшенчәсе дә шундый тарих кичергән.

Үзебезнең «функция» атамасы белән эшләү тарихын карыйк әле. 7 нче сыйныфта без «сызыкча функция» атамасын керттек, биредә без аны махсус рәвештәге $y = kx + m$ ике үзгәрешле тигезләмә дип һәм x, y үзгәрешлеләрен тигез хокуклы түгел дип (x – бәйсез үзгәрешле, y – бәйле үзгәрешле) кабул иттек. Ә аннан соң шундый сорау туды: реаль хәлләрне сурәтләгәндә, y үзгәрешлесе x аша $y = kx + m$ формуласыннан үзгә, башка төрле формула буенча бәйләнә торган математик модельләр бар микән? Әйе, бар, без алар белән дә очраштык. 7 нче сыйныфта алда искә алынган сызыкча функциядән тыш, без $y = x^2$ һәм $y = -x^2$, ә 8 нче сыйныфта $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + \ x + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$ функцияләрен өйрәндек.

Ниндидер реаль хәлне өйрәнгәндә, гадәттә анда катнашучы ике үзгәрешле зурлыкка игътибар бирелгәнен (катлаулырак хәлләрдә икедән күбрәк зурлыклар катнаша, тик без хәзергә аларны өйрәнмибез) аңлый башладык. Аларның берсе, бернигә дә бәйләнмичә, үзеннән-үзе үзгәрә кебек (ешрак аны x дип билгелиләр), ә икенче үзгәрешленең һәр кыйммәте x үзгәрешлесенең сайлап алынган кыйммәтенә билгеле бер тәртиптә бәйләнгән була (мондый



Рәс. 68



Рәс. 69

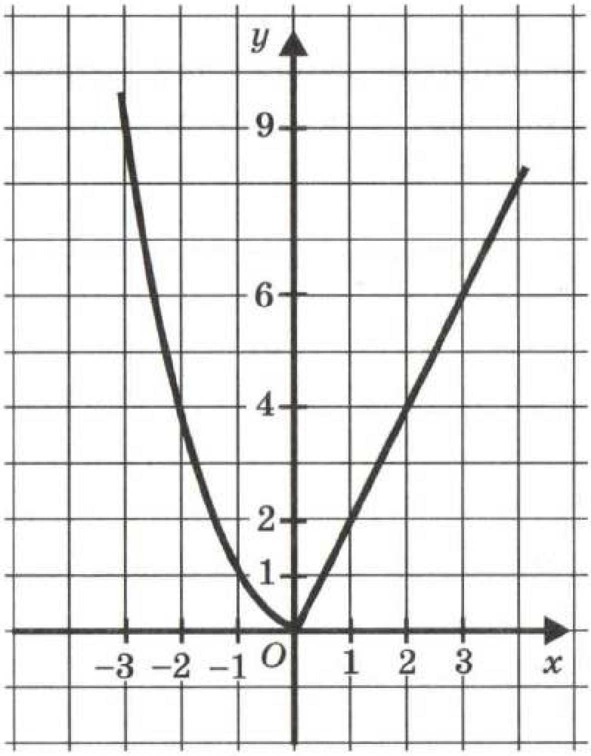
бәйле үзгәрешлене ешрак y дип билгелиләр). Күп очракларда реаль хәлнең математик моделе нәкъ менә шул y белән x бәйлелегенең математика телендәге язылышы була: $y = f(x)$. Шундый математик модельләрне без функцияләр дип атадык.

Гадәттә $y = f(x)$ математик моделе янында x үзгәрешлесе кыйммәтләренең нинди саннар күплегеннән алынуы күрсәтелә. Мәсәлән, без $y = \sqrt{x}$ функциясе турында сөйләгәндә, $x \geqslant 0$ икәнен күздә тоттык (функция графигы 68 нче рәсемдә), тик без $y = \sqrt{x}$, бирелә $x \in [0; 4]$ функциясен дә тикшердек (функция графигы 69 нчы рәсемдә). Болар төрле функцияләр.

$y = f(x)$ рәвешендәге математик модельләр куллану күп очракларда, аерым алганда, реаль хәл бәйсез үзгәрешленең төрле үзгәрү өлкәләрендә төрле формулалар белән сурәтләнгән очракларда уңай. Менә шундый функцияләрнең берсе:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ 2x, x > 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

Функциянең графигы 70 нче рәсемдә күрсәтелгән. Мондый графикларның ничек төзелүен хәтерлисезме? Башта $y = x^2$ параболасын төзергә һәм аның $x \leqslant 0$ булган өлешен алырга (параболаның сул тармагы), аннан соң $y = 2x$ турысын төзергә һәм аның $x > 0$ булган өлешен алырга кирәк. Аннары аерып алынган ике өлешне



Рәс. 70

бер рәсемдә күрсәтергә, ягъни бер координаталар яссылыгында төзергә кирәк. Без 7 нче һәм 8 нче сыйныфларда шундый кисәкле функцияләрне тикшердек.

Шулай да нәрсә соң ул функция? Алдагы анализга һәм 7–8 сыйныфларда конкрет функцияләрне өйрәнү тәҗрибәсенә таянып, ике мөһим моментны аерып күрсәтә алабыз.

1. $y = x^2$ язылышы – бәйсез x үзгәрешлесенең конкрет кыйммәтеннән y үзгәрешлесенең тиңдәшле кыйммәтен табу кагыйдәсе ул (гадәттә «f кагыйдәсе» диләр).

2. Бәйсез үзгәрешле x ның кыйммәтләре алына торган саннар күплеге X (ешрак нинди дә булса саннар аралыгы) күрсәтелә.

3. Хәзер без мәктәп алгебра курсының (бәлки, барлык математиканыңдыр) иң мөһим билгеләмәләреннән берсен формалаштырабыз.

1 нче билгеләмә. Әгәр саннар күплеге x һәм X күплегендәге һәр x элементына билгеле бер тиңдәш y санын куя торган f кагыйдәсе бирелсә, билгеләнү **өлкәсе X булган $y = f(x)$ функциясе бирелгән диләр**; $f(x)$, $x \in y$ дип язалар. Үзгәрешле x ны – **бәйсез үзгәрешле** яки **аргумент**, ә y үзгәрешлесен **бәйле үзгәрешле** дип атыйлар.

Искәрмә. Реаль тормышта кайвакыт «Минем функцияләр нинди?» яки «Минем функциональ бурычлар ниндиләр?» диләр, икенче төрле бу «минем бурычлар, минем эш-гамәлләр ниндиләр?» яки «мин ниләр эшләргә, ничек эшләргә тиеш» дигәнне аңлата. Реаль тормышта «функция» сүзе «эшләр», «эш гамәлләр», «эш итү кагыйдәләре» мәгънәсенә туры килә. Математикадагы «функция» атамасы да шул мәгънәдә кулланыла.

$y = f(x)$, $x \in X$ функциясенең билгеләнү өлкәсен $D(f)$ (латин телендә *domian* – өлкә) дип билгелиләр. Мәсәлән,

$y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ функциясе өчен (рәс. 68) $D(f) = [0; +\infty)$;

$y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ функциясе өчен (рәс. 69) $D(f) = [0; 4]$;

$y = f(x)$ функциясе өчен (рәс.70) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Әгәр $f(x)$ – алгебраик аңлатма һәм X күплеге бу аңлатманың билгеләнү өлкәсе белән туры килә икән, шулай килешенгән: $y = f(x)$, $x \in X$ язылышы урынына кыскача $y = f(x)$ язылышы кулланыла (мондый язылыш 1 билгеләмәгә туры килеп бетмәсә дә). Бу очракны математикларның һәрчак кыскалыкка омтылуы дип карарга кирәк.

Тагын бер тапкыр ассызыклыйбыз, $y = f(x)$ функциясе турында аның билгеләнү өлкәсен күрсәтмичә сөйләргә ярамый, ул йә аныклап бирелә, йә $f(x)$ аңлатмасының билгеләнү өлкәсе белән туры килеп (моны *табигый* билгеләнү өлкәсе дип тә атыйлар), күз алдында тотыла.

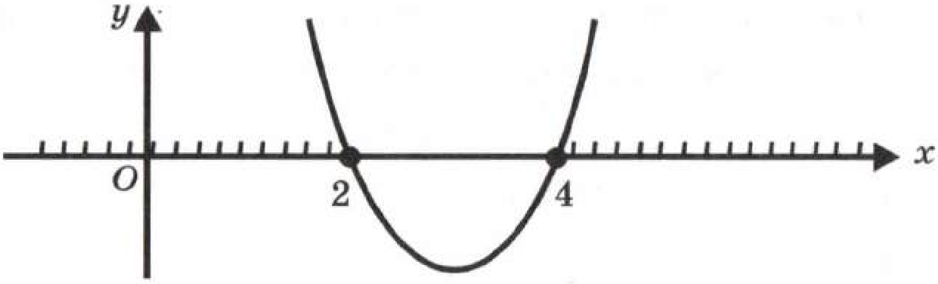
1 нче мисал. Функциянең билгеләнү өлкәсен табарга:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Чишү. а) функциянең анык күрсәтелмәгәнлектән, ул $\sqrt{x^2 - 6x + 8}$ аңлатмасының билгеләнү өлкәсе белән туры килә. Шулай итеп, сүз бирелә *функциянең табигый билгеләнү өлкәсен* табу турында бара (б) һәм в) пунктларында да шулай).

$\sqrt{h(x)}$ аңлатмасының $h(x) \geqslant 0$ булганда гына мәгънәсе бар. Димәк, $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ квадрат тигезләмәсен чишәбез.

$x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ квадрат өчбуынының тамырларын табып ($x_1 = 2$; $x_2 = 4$) һәм $y = x^2 + 6x + 8$ параболасын схематик төзеп (71 нче рәсем), үзебезгә кирәкле аралыкларны сайлап алабыз: $x \leqslant 2$; $x \geqslant 4$.



Рәс. 71

Шулай итеп, $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ (искә төшерәбез, $\cup$ – күплекләрне берләштерү тамгасы, § 3).

б) $y = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$ функциясе x ның 2 һәм 4 нокталарыннан башка теләсә кайсы нокталарда билгеләнә, бу нокталарда ваклаучы 0 гә әйләнә. Җавапны болай язабыз:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty).$$

Кыскарак язылыш та кулланыла:

$$D(f): x \neq 2; x \neq 4.$$

в) Биредә түбәндәге квадрат тигезләмәне чишәргә кирәк:

$$x^2 - 6x + 8 > 0.$$

71 нче рәсемдәге геометрик модельдән файдаланып, тик $x = 2$ һәм $x = 4$ нокталарын тикшерүгә кертми калдырып табабыз:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty).$$ ◼

2 нче билгеләмә. $y = f(x)$, $x \in X$ функциясенең барлык кыйммәтләре күплеген **функциянең кыйммәтләре өлкәсе** дип атыйлар һәм $E(f)$ (латин телендә *equal*– тигез) дип билгелиләр.

3 нче билгеләмә. $y = f(x)$, $x \in X$ **функциясенең графигы** дип xOy координаталар яссылыгында $(x; y)$ нокталары күплеген (F) атыйлар:

$$F = \{(x; y) \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

Әгәр функциянең графигы билгеле булса, аның кыйммәтләре өлкәсен табу кыен түгел. Моның өчен графикны ординаталар күчәренә проекцияләргә кирәк. Нәтиҗәдә ординаталар күчәрендә

геометрик моделе килеп чыккан саннар күплеге $E(f)$ була да. Мәсәлән, $y = \sqrt{x}$ функциясе өчен $E(f) = = [0; +\infty)$ (68 нче рәсем); $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ функциясе өчен $E(f) = [0; 2]$ (69 нчы рәсем); $y = f(x)$ функциясе өчен (70 нче рәсем) $E(f) = [0; +\infty)$.

2 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе бирелгән, биредә

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ x + 1, 0 < x \leqslant 2 \text{ булганда;} \\ 3, 2 < x \leqslant 4 \text{ булганда.} \end{cases}$$

а) $D(f)$ны табарга;

б) $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3{,}2)$, $f(4)$, $f(5)$ не исәпләргә;

в) $E(f)$ ны табарга.

Чишү. а) Функциянең билгеләнү өлкәсе өч аралыктан тора: $(-\infty; 0]$, $(0; 2]$ һәм $(2; 4]$. Аларны берләштереп, $(-\infty; 4]$ нурын табабыз.

Шулай итеп, $D(f) = (-\infty; 4]$.

б) $x = -2$ кыйммәте $x \leqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, $f(-2)$ не беренче юл буенча исәпләргә кирәк: $f(x) = -x^2$; һәм $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

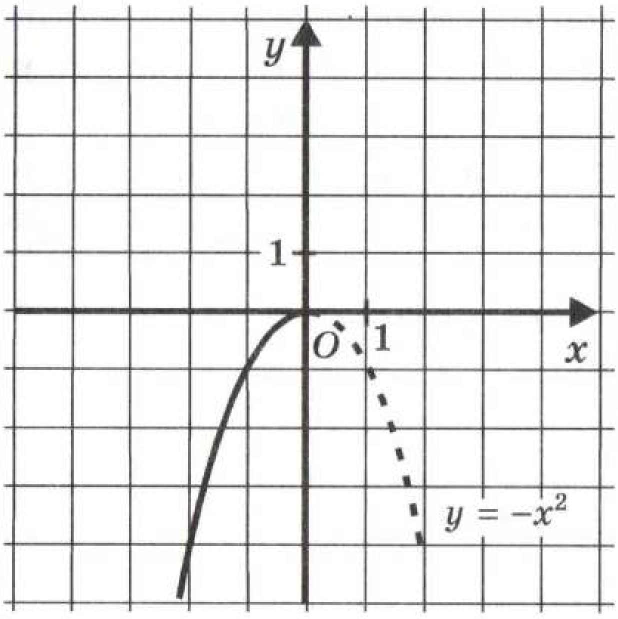
$x = 0$ кыйммәте $x \leqslant 0$ шартын канәгатьләндерә; димәк, $f(0)$ не беренче юл буенча исәпләргә кирәк: $f(x) = -x^2$; һәм $f(0) = -0^2 = 0$.

$x = 2$ кыйммәте $0 < x \leqslant 2$ шартын канәгатьләндерә, димәк, $f(2)$не икенче юл буенча исәпләргә кирәк: $f(x) = x + 1$; һәм $f(2) = 2 + 1 = 3$.

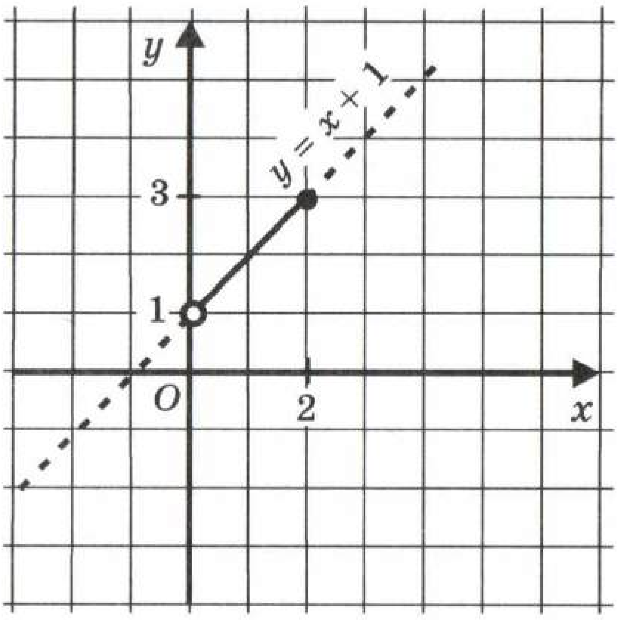
$x = 3{,}2$ кыйммәте $2 < x \leqslant 4$ шартын канәгатьләндерә, димәк, $f(3{,}2)$не өченче юл буенча исәпләргә кирәк: $f(x) = 3$; һәм $f(3{,}2) = 3$.

$x = 4$ кыйммәте дә $2 < x \leqslant 4$ шартын канәгатьләндерә, шуңа күрә $f(4) = 3$.

$x = 5$ кыйммәте функция бирелешенең бер генә шартын да канәгатьләндерми, шунлыктан $f(5)$не исәпләп булмый, $x = 5$ ноктасы функциянең билгеләнү өлкәсе керми. $f(5)$не исәпләү биреме *төгәл куелмаган.*

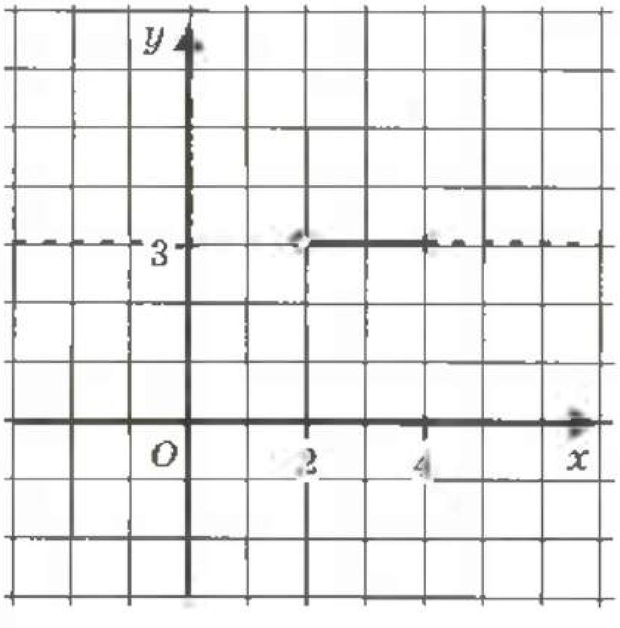


Рәс. 72

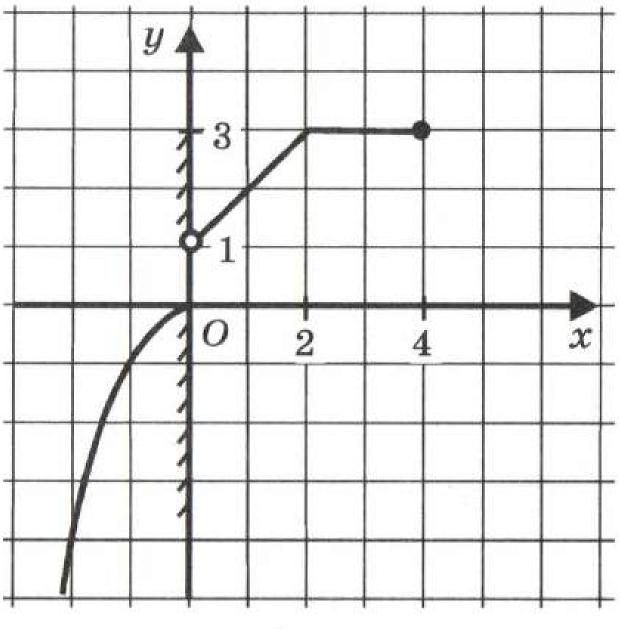


Рәс. 73

в) функциянең кыйммәтләре өлкәсен («күплеге» дип әйтү дә хата түгел), алда әйтелгәнчә, функциянең графигы ярдәмендә табып була. Графикны «кисәкләп» төзербез. Башта $y = -x^2$ параболасын төзибез һәм аны $(-\infty; 0]$ нурындагы өлешен аерып алабыз (72 нче рәсем). Аннан соң $y = x + 1$ турысын төзибез һәм аның $(0; 2]$ ярыминтервалындагы өлешен алабыз (73 нче рәсем). Аннары $y = 3$ турысын төзибез һәм аның $(2; 4]$ ярыминтервалындагы өлешен аерып алабыз (74 нче рәсем). Ниһаять, барлык өч «кисәкне» бер координаталар системасында сурәтлибез, һәм ул $y = f(x)$ функциясенең графигы була (75 нче рәсем).



Рәс. 74



Рәс. 75

Хәзер функциянең кыйммәтләре өлкәсен ике аралыктан: $(-\infty; 0]$ нурыннан (ул $y = -x^2$, $x \leqslant 0$ параболасы нокталарының ординаталары белән тула) һәм $(1; 3]$ ярыминтервалыннан (ул $y = x + 1$, $0 < x \leqslant 2$ турысы өлеше нокталарының ординаталары белән тоташ тула) торуын күрәбез. Шулай итеп, $E(f) = (-\infty; 0] \cup (1; 3]$ ◀

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Бер үзгәрешлеле санлы функциягә билгеләмә бирегез.

2. $y = x^2$, $x \in [1; 3]$ функциясе бирелгән. Аның билгеләнү өлкәсе нинди? Кыйммәтләре өлкәсе нинди?

3. Функциянең табигый билгеләнү өлкәсе нәрсә ул? Функциянең табигый билгеләнү өлкәсен күрсәтегез:

а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

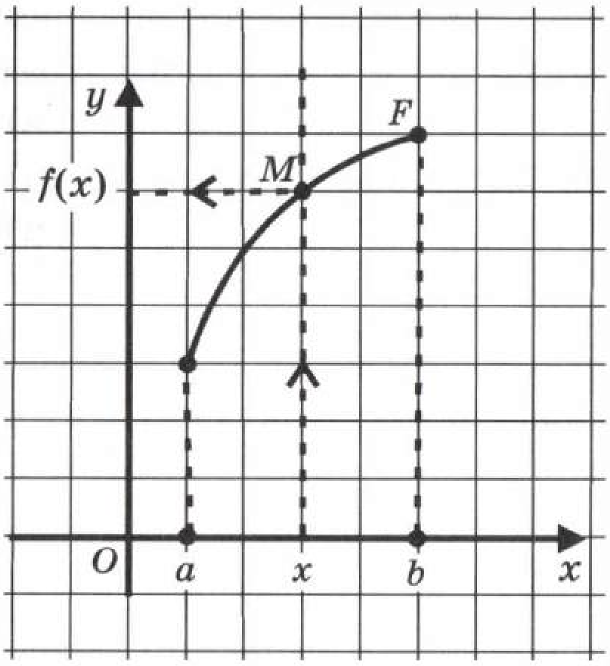
4. Бер үзгәрешлеле функциянең графигы нәрсә ул?

5. Функциянең графигы буенча аның кыйммәтләре өлкәсен ничек табарга? Мисал китерегез.

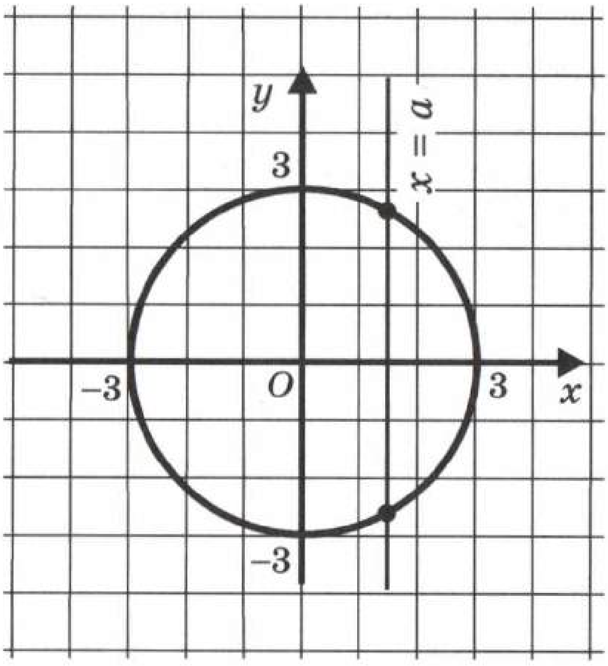
§ 9. ФУНКЦИЯНЕ БИРҮ ЮЛЛАРЫ

Функцияне бирү – аның билгеләнү өлкәсеннән ирекле сайлап алынган бәйсез үзгәрешленең кыйммәте буенча бәйле үзгәрешленең тиңдәшле кыйммәтен исәпләү өчен кагыйдә күрсәтү дигән сүз. Еш кына бу кагыйдә формула яки берничә формула белән бәйләнгән – бу очрак функцияне *аналитик* бирү юлы була. § 8 та каралган барлык функцияләр аналитик юл белән бирелгәннәр. Башка төрле юлларны шушы параграфта карарбыз.

F – xOy яссылыгында ниндидер сызык булсын. Бу сызыкны абсциссалар күчәренә проекцияләп, без, мәсәлән, $[a; b]$ кисемтәсен табабыз (76 нчы рәсем). Әлеге $[a; b]$ кисемтәсеннән ирекле x ноктасы алып, аның аша ординаталар күчәренә параллель туры үткәрәбез. Һәр шундый турының F сызыгын бер генә ноктада кисеп үтүен шарт итеп алыйк, 76 нчы рәсемдә тиңдәшле нокта M хәрефе белән билгеләнгән. M ноктасының ординатасы – xның сайлап алынган кыйммәтенә тиңдәш булган $f(x)$ саны. $[a;$



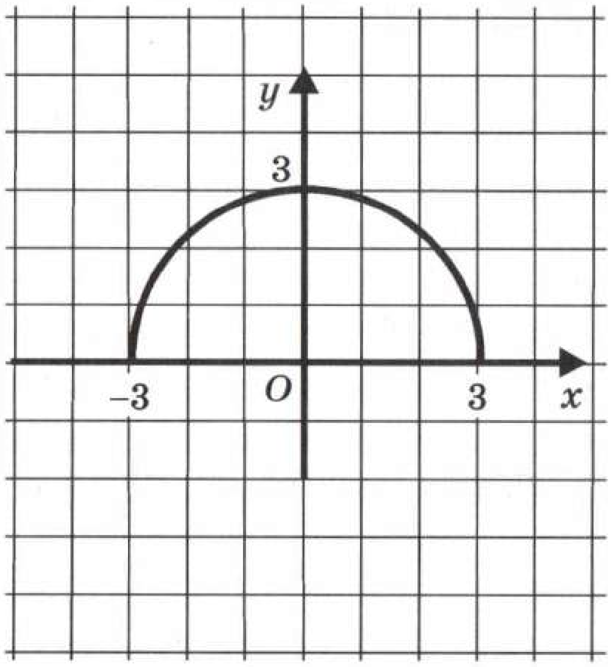
Рәс. 76



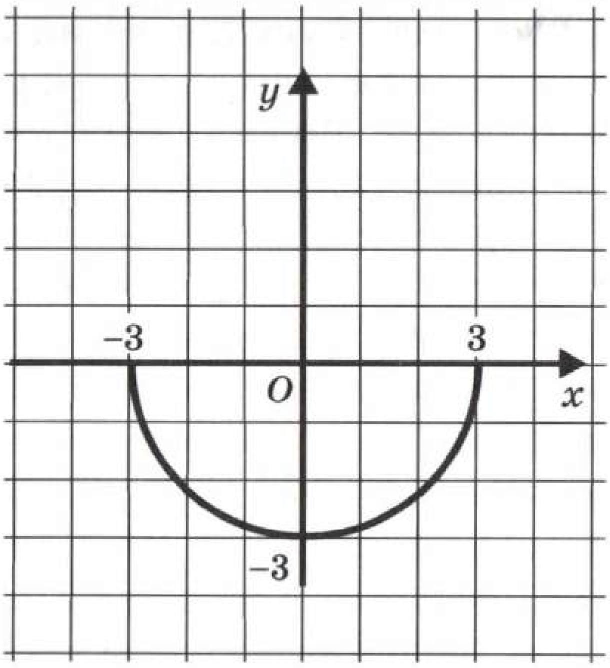
Рәс. 77

$b]$ кисемтәсендә $y = f(x)$ функциясе шуның белән билгеләнә. Функцияне болай бирүне *график* юл дип йөртәләр.

Әгәр функция аналитик юл белән бирелеп, аның графигын төзи алсак, без функцияне аналитик бирү юлыннан график юлга күчәбез дигән сүз. Киресенчә, күчүне һәрвакытта да эшләп булмый. Кагыйдә буларак, бу бик катлаулы, әмма кызыклы мәсьәлә.



Рәс. 78



Рәс. 79

Координаталар яссылыгында һәр сызыкны да ниндидер функциянең графигы дип карап булмый. Мәсәлән, $x^2 + y^2 = 9$ тигезләмәсе белән бирелгән әйләнә функция графигы булмый (77 нче рәсем). Чынлап та, әйләнәне x күчәренә проекцияләп, $[-3; 3]$ кисемтәсен табабыз. Теләсә нинди $x = a$, биредә $|a| < 3$, турысы бу сызыкны ике ноктада кисеп үтә, ә функцияне бирсен өчен $x = a$ турысы F сызыгын бер генә ноктада кисәргә тиеш. Шул ук вакытта әгәр бу әйләнәне ике өлешкә, өске (78 нче рәсем) һәм аскы (79 нчы рәсем) ярымәйләнәләргә бүләбез икән, бу ярымәйләнәләрнең һәркайсын ниндидер функциянең графигы итеп карарга була һәм әле ике очракта да функциянең график бирелешеннән аналитик бирелешкә күчәргә мөмкин. $x^2 + y^2 = 9$ тигезләмәсеннән табабыз: $y^2 = 9 - x^2$; $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Өске ярымәйләнә $y = \sqrt{9 - x^2}$ функция-сенең (78 нче рәсем), ә аскы ярымәйләнә $y = -\sqrt{9 - x^2}$ функциясенең (79 нчы рәсем) графиклары булып торалар.

Бу мисал игътибарны тагын бер мөһим фактка юнәлтә. Әйтик, $y = \sqrt{9 - x^2}$ функциясе графигын алыйк (78 нче рәсем). Биредә $D(f) = [-3; 3]$, $y_{max} = 3$, $y_{min} = 0$, функция $[-3; 0]$ кисемтәсендә үсә һәм $[0; 3]$ кисемтәсендә кими. Әгәр аналитик бирелгән функциянең $y = \sqrt{9 - x^2}$ билгеләнү өлкәсен табарга кирәк булса нишләр идек? Ул чагында, § 8 тагы кебек $9 - x^2 \geqslant 0$ тигезсезлеген чишәргә туры килер иде. Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен тапканда да, аны монотонлыкка тикшергәндә дә, кыенга туры килер иде. Функциянең аналитик һәм график бирелешләре һәркайсы үзенчә яхшы, шуңа күрә аларның икесе белән дә бергә эшләргә тырышалар. Сез инде моңа күнегеп киләсездер.

Аналитик һәм график бирелешләрдән тыш, практикада функцияне *таблицалы* бирү юлы да кулланыла. Бу ысулда аргументның чикле сандагы кыйммәтләре өчен функциянең кыйммәтләре (кайвакыт төгәл, ә кайвакыт якынча) күрсәтелгән таблица бирелә. Функциянең таблицалы бирелешенә саннарның квадратлары, саннарның кублары, квадрат тамырлар һ. б. таблицалары мисал булып тора.

Функциянең таблицалы бирелеше бик күп очракларда уңай санала. Аларда функциянең тиңдәшле кыйммәтен аргумент кыйммәте буенча исәпләп торасы юк.

Функцияне аналитик, графиклы, таблицалы бирү юллары – функция бирелешенең иң киң таралганнары, безнең ихтыяҗлар өчен шул юллар җитә. Математикада функцияне бирүнең ысуллары күп, һәм без тагын бер кызыклы юл белән танышып китик. Функцияне бирү кагыйдәсе *сүзләр белән* аңлатылганда, функция сүзләр ярдәмендә бирелгән, диләр. Мисаллар китерик.

1 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе барлык тискәре булмаган саннар күплегендә түбәндәге кагыйдә ярдәмендә бирелгән: һәр $x \geqslant 0$ санына x санының унарлы язылышында өтердән соңгы беренче билге туры килә.

Әйтик, мәсәлән, $x = 2{,}534$ икән, $f(x) = 5$ (өтердән соңгы беренче билге – 5 саны; $x = 13{,}002$ икән, $f(x) = 0$, әгәр $x = \frac{2}{3}$ икән, аны $\frac{2}{3}$ чиксез унарлы вакланма $0{,}6666...$ рәвешендә язып, $f(x) = 6$ ны табабыз. Ә $f(15)$ нәрсәгә тигез? 0 гә тигез, чөнки $15 = 15{,}000....$ Гомумән алганда, $15 = 14{,}999....$ тигезлеге дә дөрес, ләкин гадәттә периоды 9 булган чиксез периодик унарлы вакланмалар каралмый.

Теләсә нинди тискәре булмаган x санын унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин, шуңа күрә x ның һәр кыйммәте өчен өтердән соңгы беренче билгене табарга була, шунлыктан биредә, бик үк гадәти булмаса да, функция турында сөйли алабыз. Бу функциядә

$$D(f) = [0; +\infty), \quad E(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$ ◼

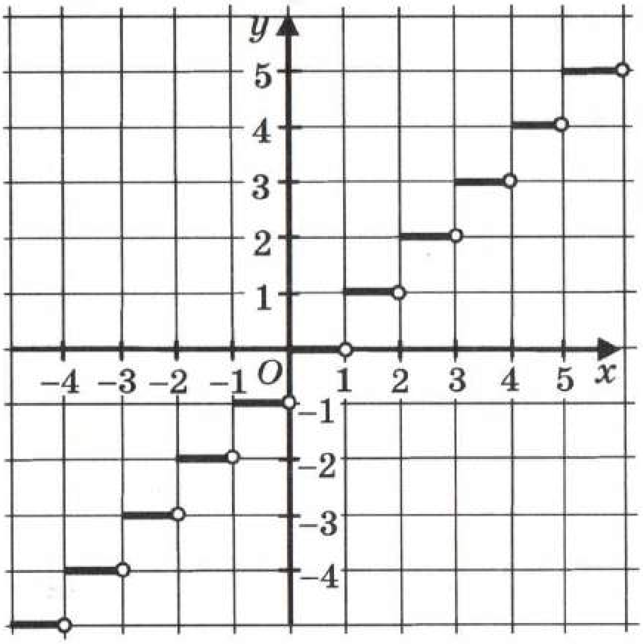
2 нче мисал. $f(x)$ функциясе барлык реаль саннар күплегендә түбәндәге кагыйдә буенча бирелгән: һәр x ка x тан зур булмаган бөтен саннарның иң зурысы тиңдәш була. Башкача әйтсәк, $y = f(x)$ функциясе түбәндәге шартлар белән бирелә:

а) $f(x)$ – бөтен сан;

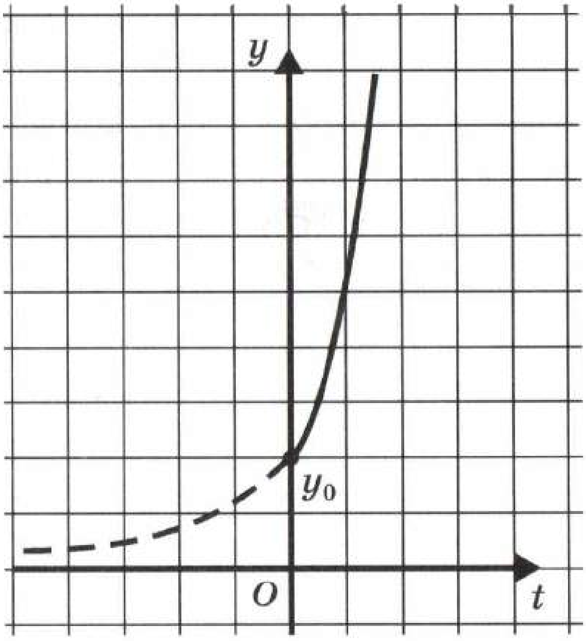
б) $f(x) \leqslant x$ (шарт буенча, $f(x)$ x тан зур була алмый);

в) $f(x) + 1 > x$ (шарт буенча, $f(x)$ – x тан зур булмаган иң зур бөтен сан, димәк, $f(x) + 1$ инде x тан зуррак).

Әйтик, $x = 2{,}534$ булса, $f(x) = 2$, чөнки 2 – бөтен сан һәм $2 \leqslant 2{,}534$ (төгәлрәге $2 < 2{,}534$), ә чираттагы бөтен 3 саны 2,534тән зуррак.



Рәс. 80



Рәс. 81

Әгәр $x = 47$ булса, $f(x) = 47$, чөнки 47 – бөтен сан, $47 \leqslant 47$ (төгәлрәге $47 = 47$) һәм 47 дән соңгы 48 саны инде x тан, ягъни 47 дән зуррак.

Ә $f(-0{,}01)$нең кыйммәте -1 була. Тикшереп карагыз: -1 саны $-0{,}01$ санынннан зур булмаган иң зур бөтен сан.

Бу функциядә $D(f) = (-\infty; +\infty)$, ә $E(f) = Z$ (бөтен саннар күплеге).■

2 нче мисалда сөйләнгән функцияне *санның бөтен өлеше* дип йөртәләр; x санының бөтен өлешен $[x]$ дип билгелиләр. Мәсәлән, $[2{,}534] = 2$, $[47] = 47$, $[-0{,}01] = -1$ $y = [x]$ функциясенең графигы бик тә үзенчәлекле була (80 нче рәсем).

Бик күп очракларда функцияләр реаль хәлләрнең математик модельләре булып хезмәт итә. Мәсәлән, ике үзгәрешле x һәм y зурлыгы катнашкан тигез үлчәмле процесс $y = kx + m$ (биредә k, m – реаль саннар) формуласы белән сурәтләнә. Иректе төшү законы $s = \frac{gt^2}{2}$ (биредә вакыт t – бәйсез үзгәрешле, ә бәйле үзгәрешле s – үтелгән юл) функциясе белән сурәтләнә.

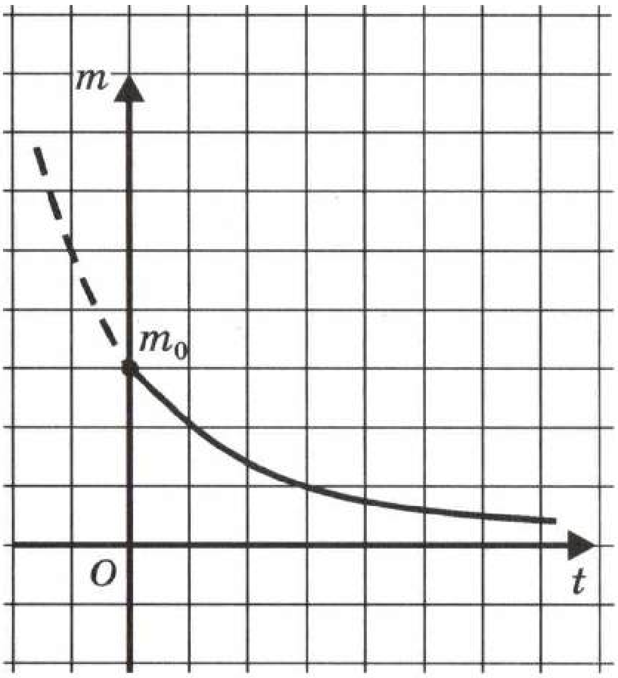
Тагын өч мисал китерәбез.

1. Әйтик тере организмнар колониясе уңайлы шартларда тереклек итә: колония биләгән урын һәм азык ресурслары чикләнмәгән, бу колония организмнары белән туенучы ерткычлар юк, шуңа күрә туулар үлемнәргә караганда артыграк. Мондый

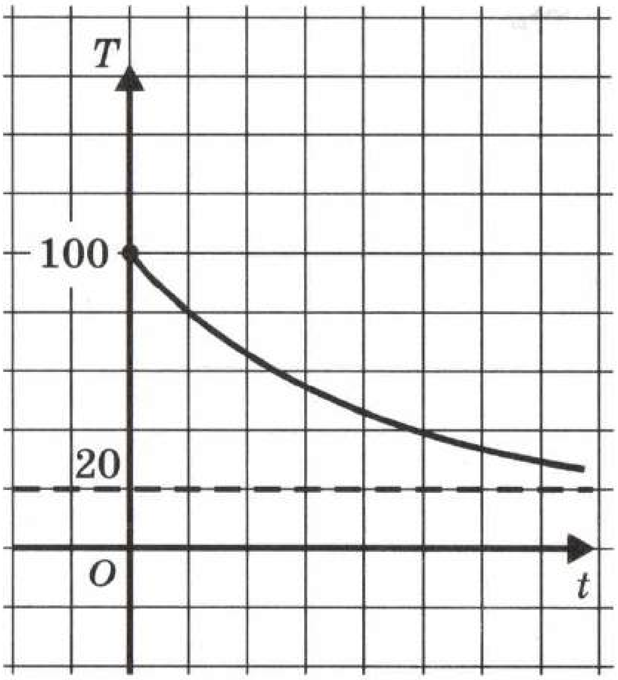
шартларда гадәттә колония организмнары санының үзгәрү тизлеге бу санга пропорциональ дип алына (организмнар күбрәк булган саен, тизлек тә зуррак; k – пропорциональлек коэффициенты). Математиклар колониядә организмнар санының $y = y_0e^{kt}$ формуласы белән белдерелгәнен ачыклаганнар, биредә y_0 – организмнарның $t = 0$ вакыттагы саны, ә $e \approx 2,7$ (e санының математикадагы роле турында 11 нче сыйныфта өйрәнерсез). 81 нче рәсемдә $y = y_0e^{kt}$ функциясе графигының схемасы бирелгән (пунктир белән функциянең $t < 0$ булгандагы гипотетик өлеше сурәтләнгән).

Саклык банкындагы кертем зурлыгы да шушы закон буенча үзгәрә, аны *күрсәткечле үсеш законы* дип атыйлар.

2. Радиоактив таркалу вакытында t вакыты мизгелендә таркалуның мизгелчә тизлеге радиоактив матдә микъдарына пропорциональ. Радиоактив таркалу законы $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ формуласы белән билгеләнә; биредә m_0 – матдәнең $t = 0$ мизлегендәге массасы; T – матдә микъдарының ике тапкыр кимүе өчен кирәкле вакыт (*ярымтаркалу периоды*). 82 нче рәсемдә $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ функциясенең графигы схематик рәвештә сурәтләнгән (пунктир белән графикның $t < 0$ булгандагы гипотетик өлеше өстәлгән).



Рәс. 82



Рәс. 83

3. Температурасы 20° С булган бүлмәгә кайнап торган чәйнекне алып керәләр. Билгеле бер шартларда җылынган җисем температурасының үзгәрү тизлеге җисем белән әйләнә-тирә температуралары аермасына пропорциональ. Җисемнең t вакыты мизгелендәге температурасы $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$ формуласы белән билгеләнә; биредә T_1 – әйләнә-тирәнең температурасы, T_0 – җисемнең t_0 моментындагы температурасы. Бу очракта $T_1 = 20°$, ә $T_0 = 100°$. Димәк, $T = 20 + 80e^{-kt}$. Бу функциянең графигы схематик төстә 83 нче рәсемдә сурәтләнгән. $T = 20$ турысы – графикның асимптотасы.

График вакыт узу белән чәйнек температурасының акрынлап әйләнә-тирә температурасына якынаюын тагын бер тапкыр раслый. Моңа охшаш процесслар *тигезләнү процесслары* дип атала.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Функциянең аналитик бирелешенә мисал китерегез (бер формула ярдәмендә).

2. Кисәкле функциянең аналитик бирелешенә мисал китерегез.

2. Функциянең график бирелешенә мисал китерегез.

4. Координаталар яссылыгында ниндидер функциянең графигы дип карап булмый торган графикка мисал китерегез. Ни өчен икәнен аңлатыгыз.

5. Функциянең сүзләр ярдәмендә бирелешенә мисал китерегез (§ 9 тагы 1 нче һәм 2 нче мисалларыннан тыш).

6. Билгеләнү өлкәсе [–2; 4] кисемтәсе булган һәм графигы параболаның бер өлешеннән һәм туры кисемтәсеннән торган кисәкле өзлексез функция уйлап табыгыз. Бу функцияне аналитик бирегез.

7. Бер өзелү ноктасы булган, билгеләнү өлкәсе булып (0;9] ярыминтервалы торган, графигы $y = \frac{k}{x}$ гиперболасының бер өлешеннән һәм $y = \sqrt{x}$ функциясе графигының бер өлешеннән торучы кисәкле өзлексез функция уйлап тыбыгыз. Бу функцияне аналитик бирегез.

§ 10. ФУНКЦИЯЛӘРНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

7 нче һәм 8 нче сыйныфларда сез функцияләрнең кайбер үзлекләрен өйрәндегез. Хәзер шуларның барысын бер параграфка җыйнап, аларның асылын һәм геометрик мәгънәсен искә төшерербез, функция графигын укыганда, бу үзлекләрне нинди тәртиптә санап чыгу турында килешербез. Игътибар итегез, барлык билгеләмәләрдә дә функциянең билгеләнү өлкәсенең аскүплеге булып торучы X саннар күплеге катнаша: $X \subset D(f)$. Практикада барыннан да ешрак X санлы аралык булган (кисемтә, интервал, нур һ. б.) очраклар очрый.

<u>1 нче билгеләмә.</u> Әгәр X күплегендәге $x_1 < x_2$ булган теләсә нинди ике элемент x_1 һәм x_2 өчен $f(x_1) < f(x_2)$ тигезсезлеге үтәлсә, $y = f(x)$ функциясен $X \subset D(f)$ күплегендә үсә баручы дип атыйлар.

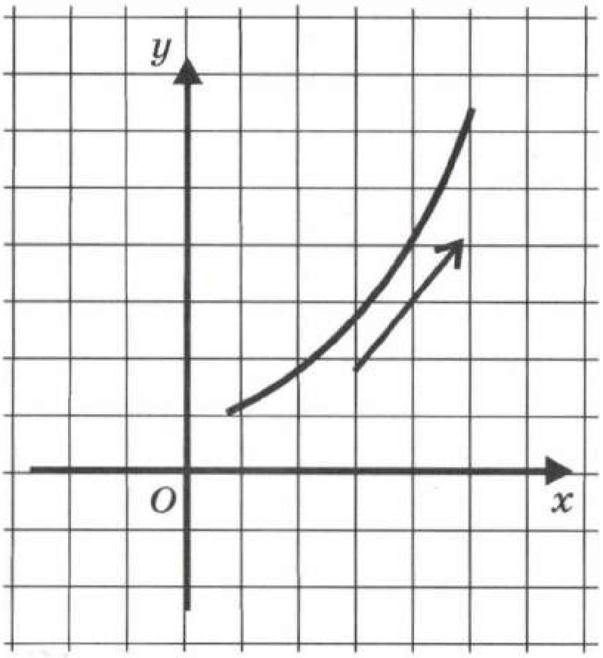
<u>2 нче билгеләмә.</u> Әгәр X күплегендәге $x_1 < x_2$ булган теләсә нинди ике элемент x_1 һәм x_2 өчен $f(x_1) > f(x_2)$ тигезсезлеге үтәлсә, $y = f(x)$ функциясен $X \subset D(f)$ күплегендә кими баручы дип атыйлар.

Башкача әйткәндә, аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең зуррак кыйммәте туры килсә, функция үсә, әгәр аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең кечерәк кыйммәте туры килсә, функция кими.

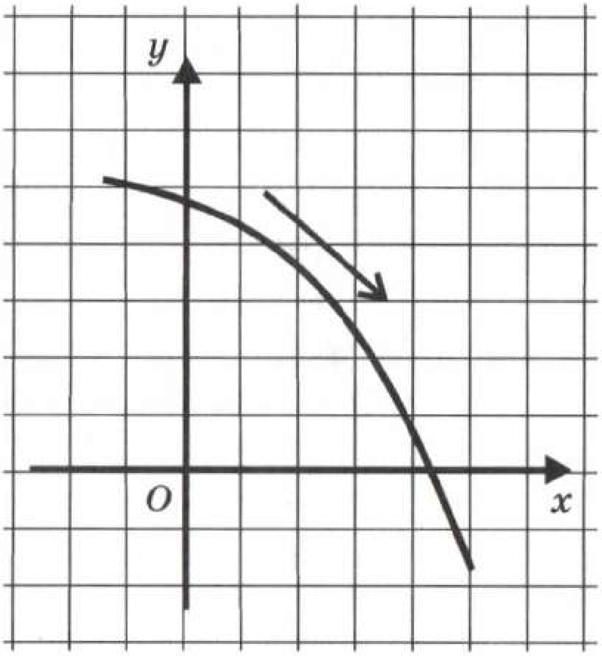
7 нче һәм 8 нче сыйныфларда без функциянең үсүе яки кимүе төшенчәләрен геометрик яктан болай аңлаттык: үсә баручы функция графигы буйлап сулдан уңга хәрәкәт иткәндә, без тауга менгән кебек булабыз (84 нче рәсем), ә кими баручы функция графигы буйлап сулдан уңга хәрәкәтләнеп, без таудан төшәбез (85 нче рәсем).

Гадәттә «үсә баручы функция» һәм «кими баручы функция» атамаларын гомуми *монотон функция* исеме белән берләштерәләр, ә функцияне үсүгә яки кимүгә тикшерүне функцияне монотонлыкка тикшерү дип атыйлар.

Тагын бер күрсәтмә: әгәр функция үзенең табигый билгеләнү өлкәсендә үсә (яки кими) икән, гадәттә X саннар аралыгын күрсәтмичә генә, үсә баручы (яки кими баручы) функция диләр.



Рәс. 84



Рәс. 85

1 нче мисал. Функцияне монотонлыкка тикшерергә:

$$y = 5 - 2x.$$

Чишү. $f(x) = 5 - 2x$ дип тамгалыйбыз. Аргументның ирекле кыйммәтләрен x_1 һәм x_2 не алабыз һәм $x_1 < x_2$ дип исәплибез. ул чагында санлы тигезсезлекнең үзлекләре буенча (без аларны 8 нче сыйныфта өйрәндек) табабыз:

$$-2x_1 > -2x_2;$$
$$5 - 2x_1 > 5 - 2x_2.$$

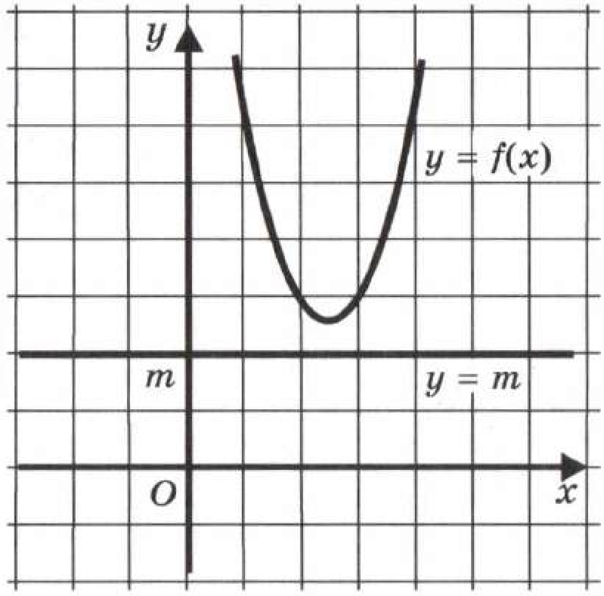
Соңгы тигезсезлек $f(x_1) > f(x_2)$ икәнлеген аңлата.

Шулай итеп, $x_1 < x_2$ дән $f(x_1) > f(x_2)$ икәне килеп чыга, ә бу бирелгән функциянең барлык саннар турысында кимүен күрсәтә.

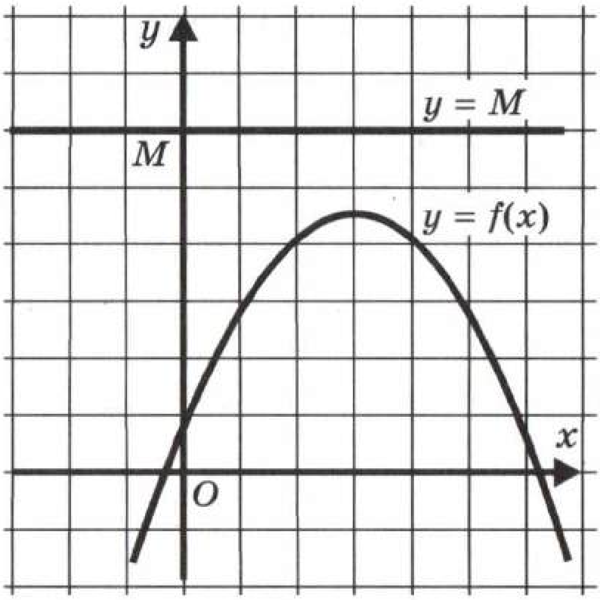
3 нче билгеләмә. Әгәр $x \in X$ һәм x ның теләсә нинди кыйммәте өчен $f(x) > m$ тигезсезлеге үтәлә торган m саны булса, $y = f(x)$ функциясен $X \subset D(f)$ **күплегендә астан чикләнгән** дип атыйлар.

4 нче билгеләмә. Әгәр $x \in X$ һәм x ның теләсә нинди кыйммәте өчен $f(x) < M$ тигезсезлеге үтәлә торган M саны булса, $y = f(x)$ функциясен $X \subset D(f)$ **күплегендә өстән чикләнгән** дип атыйлар.

Әгәр X күплеге күрсәтелмәсә, функциянең барлык билгеләнү өлкәсендә астан яки өстән чикләнгәнлеге турында сүз бара.



Рәс. 86



Рәс. 87

Әгәр функция астан да, өстән дә чикләнгән булса, аны *чикләнгән функция* дип атыйлар.

Функциянең чикләнгәнлеге аның графигыннан җиңел укыла: функция астан чикләнгән икән, аның графигы тулысы белән ниндидер $y = m$ горизонталь турысыннан өстәрәк урнаша (86 нчы рәсем); функция өстән чикләнсә, аның графигы тулысынча ниндидер горизонталь $y = M$ турысыннан астарак урнаша (87 нче рәсем).

2 нче мисал. Функцияне чикләнгәнлеккә тикшерергә:

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Чишү. Бер яктан карасак,

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0$$

тигезсезлегенең дөреслеге ачыктан-ачык ($\sqrt{a} \geqslant 0$ квадрат тамырының билгеләмәсе буенча). Бу исә функция астан чикләнгән дигәнне аңлата (үзенең билгеләнү өлкәсендә, ягъни $[-3; 3]$ кисемтәсендә).

Икенче яктан, теләсә кайсы $x \in [-3; 3]$ өчен $9 - x^2 \leqslant 9$ тигезсезлеге үтәлә, шунлыктан $\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$.

Бу функциянең өстән чикләнгән булуын күрсәтә.

Ә хәзер бирелгән функциянең графигын карагыз (92 нче биттәге 78 нче рәсем). Графиктан функциянең астан да, өстән дә чикләнгәнлеге җиңел укыла. ◼

5 нче билгеләмә. Әгәр

1) $f(x_0) = m$ булган $x_0 \in x$ саны булса;

2) теләсә нинди $x \in X$ өчен $f(x) \geqslant f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлсә, m санын $X \subset D(f)$ **күплегендә $y = f(x)$ функциясенең иң кечкенә кыйммәте** дип атыйлар.

6 нчы билгеләмә. Әгәр

1) $f(x_0) = M$ булган $x_0 \in x$ саны булса;

2) теләсә нинди $x \in X$ өчен $f(x) \leqslant f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлсә, m санын $X \subset D(f)$ **күплегендә $y = f(x)$ функциясенең иң зур кыйммәте** дип атыйлар.

Түбәндәге расламалар дөрес.

1. *Әгәр функциянең y_{min} бар икән, ул астан чикләнгән.*
2. *Әгәр функциянең y_{max} бар икән, ул өстән чикләнгән.*
3. *Әгәр функция астан чикләнмәгән булса, y_{min} булмый.*
4. *Әгәр функция өстән чикләнмәгән булса, y_{max} булмый.*

Бу расламаларны исбатлыйбыз.

1) Әйтик, $y = f(x)$, $x \in X$ функциясенең иң кечкенә кыйммәте бар, ди. Димәк, $x_0 \in x$ саны бар, һәм теләсә нинди $x \in X$ өчен $f(x) \geqslant f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлә. Ягъни функция астан чикләнгән дигән сүз. 2) үзлек нәкъ шулай исбатлана.

3) Исбатлауны киресеннән чыгып эшлибез. y_{min} бар дип исәплик. Ул вакытта 1) раслама буенча функция астан чикләнгән булып чыга, тик бу шартка каршы килә. Димәк, безнең фаразлау дөрес түгел, ягъни функциянең иң кечкенә кыйммәте булмый. 4) үзлек нәкъ шулай исбатлана.

3 нче мисал. Функциянең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга:

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Чишү. 2 нче мисалда без инде $0 \leqslant \sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$, икәнен исбатладык, биредә $x \in [-3; 3]$. Моннан тыш, әгәр $x = \pm 3$ икән, $y = 0$. 5 нче билгеләмә буенча, бу $y_{min} = 0$ дигән сүз, әгәр $x = 0$

булса, $y = 3$ була. Шуңа күрә $y_{max} = 3$. Табылган нәтиҗәләр $y = \sqrt{9 - x^2}$ функциясенең графигында ачык күренә (78 нче рәсем). ◼

4 нче мисал. Функциянең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга:

а) $y = \sqrt{16 - 4x^2 + 12x}$; б) $y = \dfrac{x^8 + x^4 + 4x^2 + 4}{x^6 + 2x^4}$.

Чишү. а) Табабыз:

$$y = \sqrt{16 - (4x^2 - 12x + 9) + 9} = \sqrt{25 - (2x - 3)^2} \leqslant \sqrt{25} = 5.$$

$x = 1,5$ ноктасында функция 5 кыйммәтен ала, барлык башка нокталарда функциянең кыйммәте 5 тән кечерәк. Димәк, $y_{max} = 5$. Икенче яктан, $16 - 4x^2 + 12x \geqslant 0$ тигезсезлеге, ягъни $-4(x + 1)(x - 4) \geqslant 0$ үтәлергә тиеш. $x = -1$, $x = 4$ нокталарында функция 0 гә әйләнә, калган барлык нокталарда ул уңай була. Димәк, $y_{min} = 0$.

б) Табабыз: $y = \dfrac{x^8 + x^4 + 4x^2 + 4}{x^6 + 2x^4} = \dfrac{x^8 + (x^2 + 2)^2}{x^4(x^2 + 2)}$. Әйтик, $x^4 = a$, $x^2 + 2 = b$ булсын, ди. Ул чагында $y = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$. Бу аңлатма 2 дән кечерәк түгел. Чынлап та, $\dfrac{a^2 + b^2}{ab} - 2 = \dfrac{(a - b)^2}{ab} \geqslant 0$ һәм шул ук вакытта тигезлек билгесе $a = b$ булганда, ягъни $x^4 = x^2 + 2$ шарты үтәлгәндә генә урынлы. Бу тигезләмәдән: $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$. Шулай итеп, $y_{min} = y(\sqrt{2}) = y(-\sqrt{2}) = 2$.

Бирелгән функциянең астан чикләнмәгәнлеген исбатлыйбыз. Кайбер рәвешүзгәртүләр ясыйбыз:

$$y = \frac{x^8 + (x^2 + 2)^2}{x^4(x^2 + 2)} = \frac{x^4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4} = \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2) + 4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4} =$$
$$= x^2 - 2 + \frac{4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4}.$$

Киресен фаразлыйк: функция өстән чикләнгән, ягъни теләсә нинди x өчен $y \leqslant M$ тигезсезлеге үтәлә торган M саны бар дип алабыз. $x = \sqrt{M + 3}$ ноктасын карыйк. Ул вакытта $x = M + 3$, $x^2 - 2 = M + 1$, $x^2 - 2 > M$. Аннан соң $\dfrac{4}{x^2 + 2} > 0$ һәм $\dfrac{x^2 + 2}{x^4} > 0$ булганлыктан, $x^2 - 2 + \dfrac{4}{x^2 + 2} + \dfrac{x^2 + 2}{x^4} > M$.

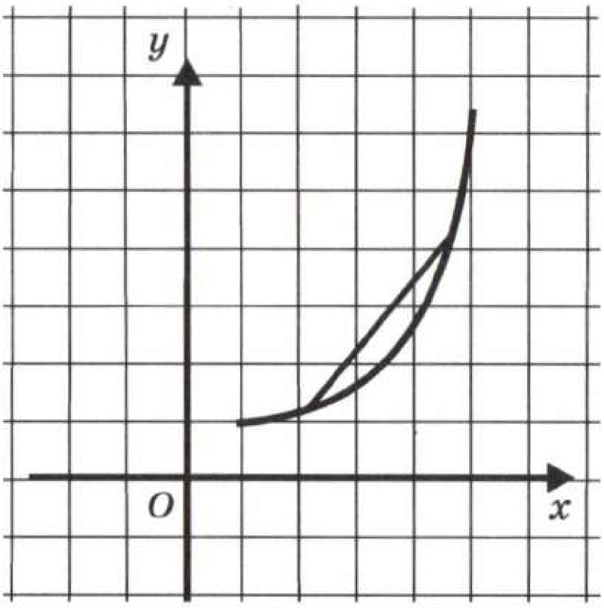
Без теләсә нинди x өчен $y \leqslant M$ дип фаразлаган идек, ә $x = \sqrt{M + 3}$ ноктасында $y > M$ тигезсезлеге үтәлә булып чыкты. Капма-каршылыкка килеп чыктык, димәк, безнең фараз дөрес түгел – функция өстән чикләнмәгән. Тик бу вакытта аның иң зур кыйммәте юк дигән сүз.

Җавап: а) $y_{min} = 0$, $y_{max} = 5$; б) $y_{min} = 2$, y_{max} булмый.

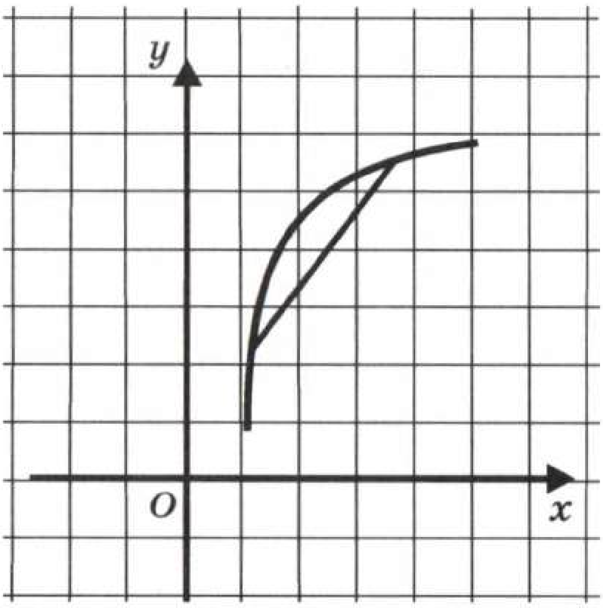
7 нче һәм 8 нче сыйныфларда без функцияләрнең тагын ике үзлеген искә алдык. Беренчесе – функциянең кабарынкылык үзлеге иде. Әгәр функция графигының (абсциссалары X та) ике ноктасын туры кисемтәсе белән тоташтырып, графикның аңа туры килгән өлеше бу кисемтәдән астарак урнашса (88 нче рәсем). x аралыгында *функция аска таба кабарынкы* дип исәпләнә. Әгәр функция графигының (абсциссалары x та) ике ноктасын тоташтырып, графикның аңа туры килгән өлеше бу кисемтәдән өстәрәк урнашса (89 нчы рәсем), *функция өскә таба кабарынкы* дип исәпләнә.

Икенче үзлек – *функциянең X аралыгында өзлексезлеге* – функциянең графигы X аралыгында тоташ, өзекләре юк дигәнне аңлата.

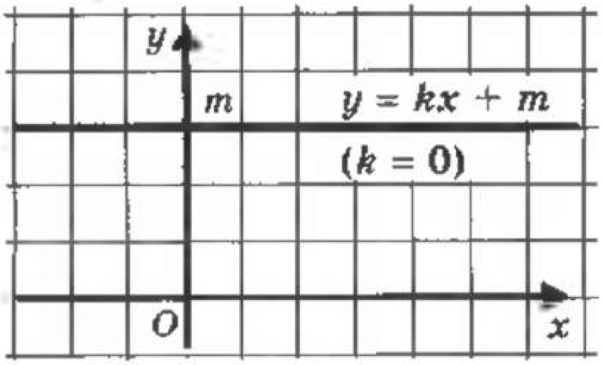
Искәрмә. *Чынлыкта исә, математикада барысы да нәкъ киресе: функциянең графигы аның өзлексезлеге исбатланганнан соң гына өзелүләрсез тоташ сызык белән сурәтләнә ала. Әмма функциянең формаль өзлексезлеге билгеләмәсе шактый катлаулы һәм хәзергә без аны*



Рәс. 88



Рәс. 89



Рәс. 90

өйрәнә алмыйбыз. Функциянең кабарынкылыгы белән дә шундый ук хәл. Функцияләрнең әлеге үзлекләрен тикшергәндә хәзергә күренмә-интуитив күзаллауларга гына таянырбыз.

Ә хәзер 7 нче һәм 8 нче сыйныфларда өйрәнгән функцияләрне искә төшерербез, аларның графикларын төзербез, билгеле бер тәртип буенча үзлекләрен санап чыгарбыз, мәсәлән: монотонлыгы; чикләнгәнлеге; y_{min}, y_{max} өзлексезлеге; кайвакыт кабарынкылыгы турында да сөйләшербез.

Уку барышында функцияләрнең башка үзлекләре дә килеп чыгар һәм үзлекләр исемлеге дә үзгәрер.

1. $y = kx + m$ сызыкча функциясе

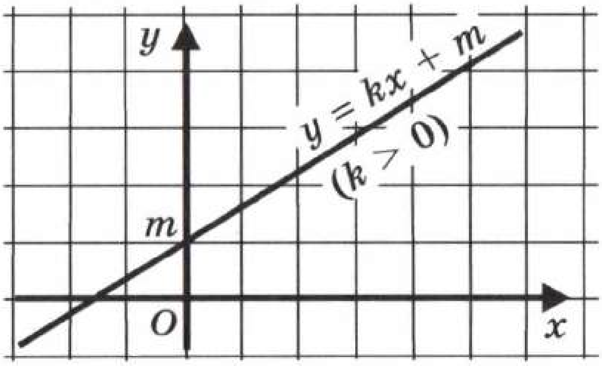
$y = kx + m$ функциясенең графигы – туры сызык (90–92 нче рәсем).

$y = kx + m$ функциясенең үзлекләре

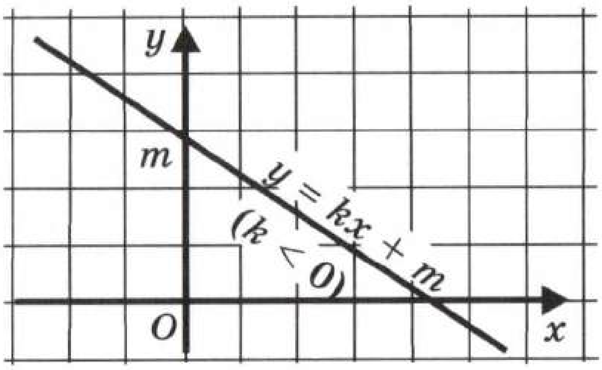
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $k > 0$ булганда үсә (рәс. 91), $k < 0$ (91 нче рәсем) булганда кими (92 нче рәсем);

3) астан да, өстән дә чикләнмәгән;



Рәс. 91



Рәс. 92

4) иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;
5) функция өзлексез;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y = kx^2$ $(k \neq 0)$ функциясе

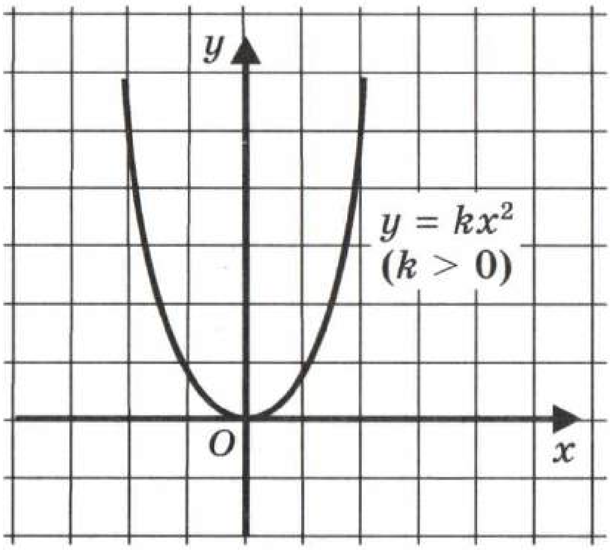
$y = kx^2$ функциясенең графигы булып, түбәсе координаталар башында урнашкан һәм тармаклары, $k > 0$ булганда – өскә (93 нче рәсем) һәм $k < 0$ булганда аска (94 нче рәсем) таба юнәлгән парабола тора. $x = 0$ турысы (y күчәре) параболаның күчәре була.

$y = kx^2$ функциясенең үзлекләре

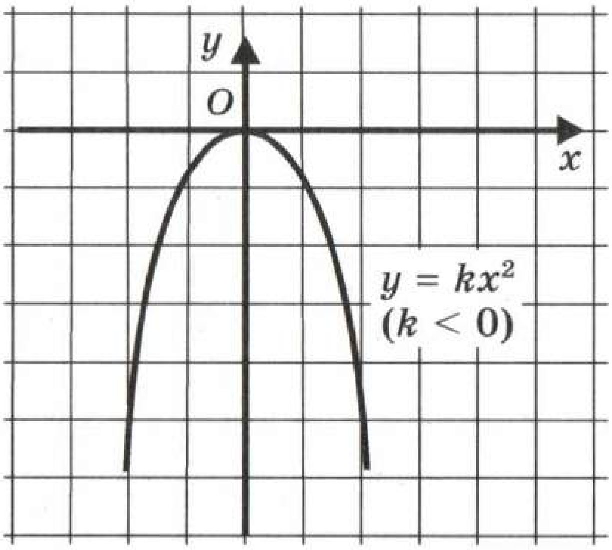
$k > 0$ очрагы өчен (93 нче рәсем):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $(-\infty; 0]$ нурында кими, $[0; +\infty)$ нурында үсә;
3) астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән;
4) $y_{min} = 0$, y_{max} булмый;
5) өзлексез;
6) $E(f) = [0; +\infty)$;
7) аска таба кабарынкы.

Игътибар итегез: $(-\infty; 0]$ аралыгында функция кими, ә $[0; +\infty)$ аралыгында функция үсә. Бу аралыкларны $y = kx^2$ функциясенең монотонлык аралыклары дип атыйлар. Башка функцияләр өчен дә монотонлык аралыгы төшенчәсен кулланырбыз.



Рәс. 93



Рәс. 94

$k < 0$ очрагы өчен (94 нче рәсем):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $(-\infty; 0]$ нурында үсә, $[0; +\infty)$ нурында кими;

3) астан чикләнмәгән, өстән чикләнгән;

4) y_{min} булмый, $y_{max} = 0$;

5) өзлексез;

6) $E(f) = (-\infty; 0]$;

7) өскә таба кабарынкы.

$y = f(x)$ функциясе графигы нокталары буенча төзелә; $(x; f(x))$ рәвешендәге нокталарны никадәр күбрәк алсак, график шулкадәр дөреслеккә якын булачак. Әгәр нокталар санын тагын да арттырсак, функция турында мәгълүмат тагын да тулырак була барыр. Шуңа күрә графикны тоташ сызык (бу очракта парабола) рәвешендә ясарга тырышабыз. Ә аннан соң, графикны укыганда, функциянең өзлексезлеге, кабарынкылыгы турында нәтиҗәләр ясыйбыз. Сез хәзергә шуны аңларга тырышыгыз, санап үтелгән җиде үзлекнең 1–4 ләре генә «законлы», ягъни без аларны нигезли алабыз. Калган үзлекләр турында күреп яки интуиция буенча фикер йөртәбез.

3. $y = \frac{k}{x}$ функциясе

Функциянең графигы булып гипербола тора, ә координата күчәрләре гиперболаның асимптоталары булалар (95, 96 нчы рәс.).

$y = \frac{k}{x}$ **функциясенең үзлекләре.**

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

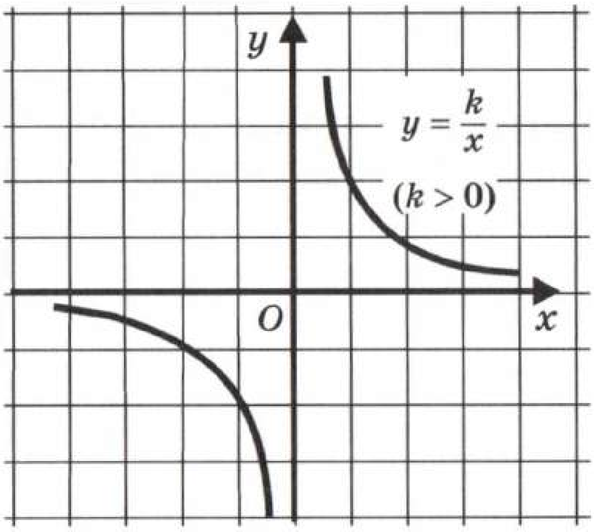
2) әгәр $k > 0$ булса, функция $(-\infty; 0)$ һәм $(0; +\infty)$ ачык нурларында кими (95 нче рәс.); әгәр $k < 0$ булса, функция $(-\infty; 0)$ һәм $(0; +\infty)$ ачык нурларында үсә (96 нчы рәсем);

3) астан да, өстән дә чикләнмәгән;

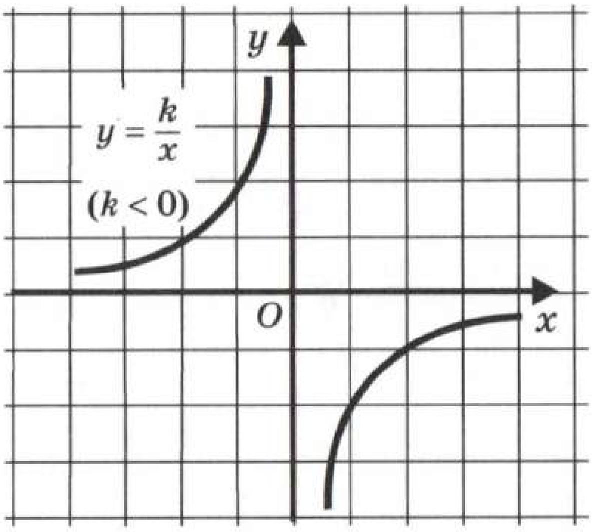
4) иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;

5) функция $(-\infty; 0)$ һәм $(0; +\infty)$ ачык нурларында өзлексез;

6) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



Рәс. 95



Рәс. 96

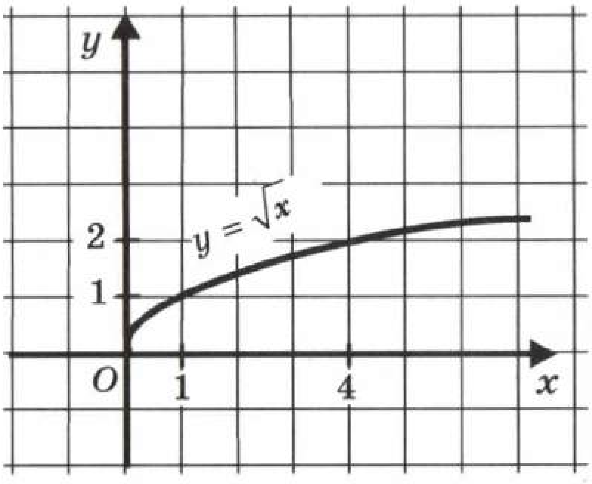
4. $y = \sqrt{x}$ функциясе

Функциянең графигы булып парабола тармагы тора (97 нче рәс.).

$y = \sqrt{x}$ функциясенең үзлекләре

1) $D(f) = [0; +\infty)$
2) үсә;
3) астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән;
4) $y_{min} = 0$, y_{max} булмый;
5) өзлексез;
6) $E(f) = [0; +\infty)$;
7) өскә таба кабарынкы.

111 нче биттә без 1) –4) үзлекләрне нигезли алабыз, дигән идек. Моны үрнәк сыйфатында $y = \sqrt{x}$ функциясе өчен эшләп карыйк.



Рәс. 97

1) $D(f) = [0; +\infty)$. Биредә сүз функция, ягъни $\sqrt{x}$ аңлатмасының табигый билгеләнү өлкәсе турында бара. Ул $x \geqslant 0$ тигезсезлеге белән бирелә, моннан $D(f) = [0; +\infty)$.

2) $0 \leqslant x_1 < x_2$ булсын. $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$ дип фаразлыйбыз. Ул вакытта $(\sqrt{x_1})^2 > (\sqrt{x_2})^2$ ягъни $x_1 \geqslant x_2$, әмма ул шартка каршы килә.

Димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел, ә $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ тигезсезлеге дөрес була. Шулай итеп, $0 \leqslant x_1 < x_2$ дән $f(x_1) < f(x_2)$ килеп чыга, ә бу исә функциянең $[0;+\infty)$ нурында үсүен күрсәтә.

3) Теләсә кайсы $x \geqslant 0$ өчен $\sqrt{x} \geqslant 0$ тигезсезлеге үтәлгәнлектән, функциянең астан чикләнгән булуы ачык. Бу функциянең өстән чикләнмәгән булуын исбатлыйк. Киресеннән чыгып, функция өстән чикләнгән дип алабыз, ягъни теләсә нинди $x \geqslant 0$ өчен $\sqrt{x} < M$ тигезсезлеге үтәлә торган уңай M саны бар дип фаразлыйбыз. $x_0 = (M + 1)^2$ ноктасын алабыз. Ул чагында $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{(M+1)^2} = M + 1 > M$. Шулай итеп, без теләсә нинди $x \geqslant 0$ өчен $\sqrt{x} < M$ тигезсезлеге үтәлә дип фаразласак та, бу тигезсезлек үтәлми торган конкрет x_0 ноктасын таптык. Әлеге капма-каршылык безнең фаразның дөрес булмавын аңлата, шунлыктан, функция өстән чикләнмәгән булып чыга.

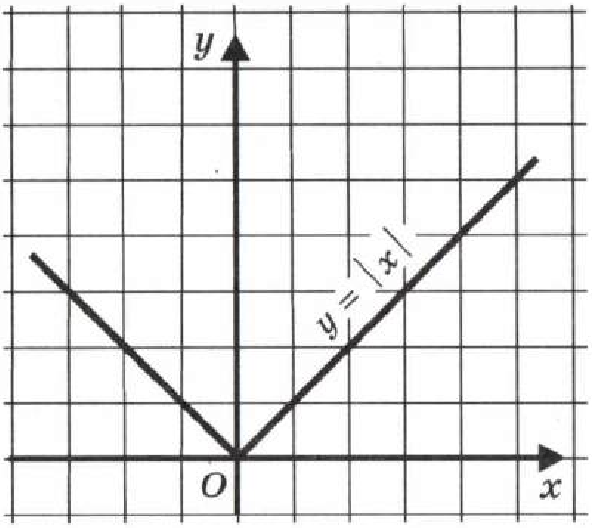
4) $f(0) = 0$ һәм теләсә кайсы $x \geqslant 0$ өчен $\sqrt{x} \geqslant 0$ тигезсезлеге үтәлә. Бу $y_{min} = 0$ дигән сүз. Ә функция өстән чикләнмәгәнлектән, y_{max} булмый.

5. $y = |x|$ функциясе

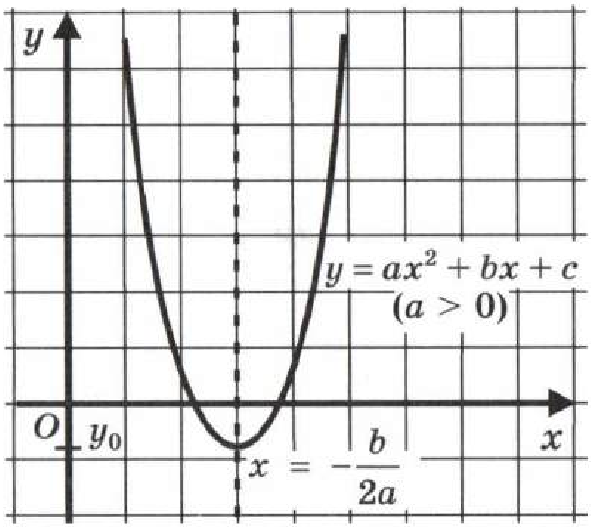
Функциянең графигы булып, ике нурның: $y = x$, $x \geqslant 0$ һәм $y = -x$, $x \leqslant 0$ (98 нче рәсем) нурларының берләшмәсе тора.

$y = |x|$ функциясенең үзлекләре

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $(-\infty; 0]$ нурында кими, $[0;+\infty)$ нурында үсә;
3) астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән.
4) $y_{min} = 0$, y_{max} булмый;
5) өзлексез;
6) $E(f) = [0; +\infty)$.



Рәс. 98



Рәс. 99

6. $y = ax^2 + bx + c$ функциясе

Функциянең графигы булып түбәсе $(x_0; y_0)$ ноктасында урнашкан парабола тора, биредә

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c_0,$$

ә параболаның тармаклары $a > 0$ булганда өскә (99 нчы рәсем) һәм $a < 0$ булганда аска (100 нче рәсем) юнәлә. $x = -\frac{b}{2a}$ ноктасы параболаның күчәре була.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясенең үзлекләре

$a > 0$ очрагы өчен (99 нчы рәсем):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ нурында кими, $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ нурында үсә;

3) астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән;

4) $y_{min} = y_0$, y_{max} булмый;

5) өзлексез;

6) $E(f) = [y_0; +\infty)$;

7) аска таба кабарынкы.

$a < 0$ очрагы өчен (100 нче рәсем):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ нурында үсә, $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ нурында кими;

3) астан чикләнмәгән, өстән чикләнгән;

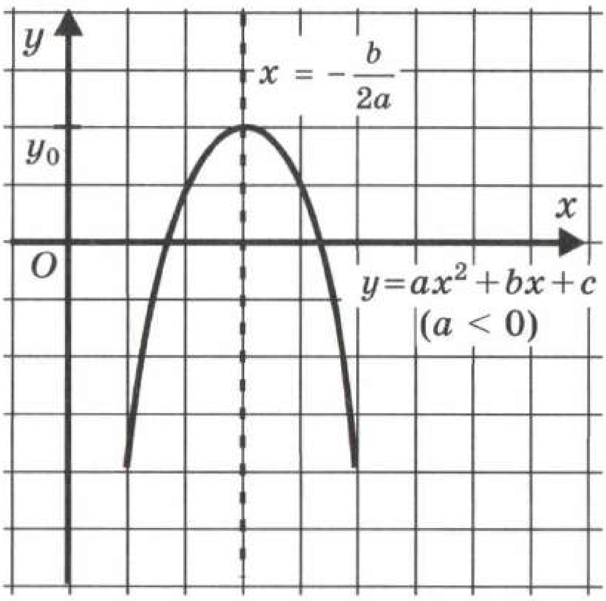
4) y_{min} булмый, $y_{max} = y_0$;

5) өзлексез;

6) $E(f) = (-\infty; y_0]$;

7) өскә таба кабарынкы.

Функция турында үзебез моңарчы өйрәнгәннәрне кабатлап чыктык. Тик функцияләр моның белән генә чикләнми. Әле шушы бүлектә үк яңа функцияләр һәм аларның үзлекләре белән танышырбыз.



Рәс. 100

5 нче мисал. График юл белән бирелгән $y = f(x)$ функциясенең (101 нче рәсем) графигын укырга, биредә x күчәре – графикның горизонталь асимптотасы.

Чишү. Графикны уку – ул функциянең үзлекләрен аның графигына таянып санап чыгу, дигән сүз.

1) $D(f) = [-4; +\infty)$;

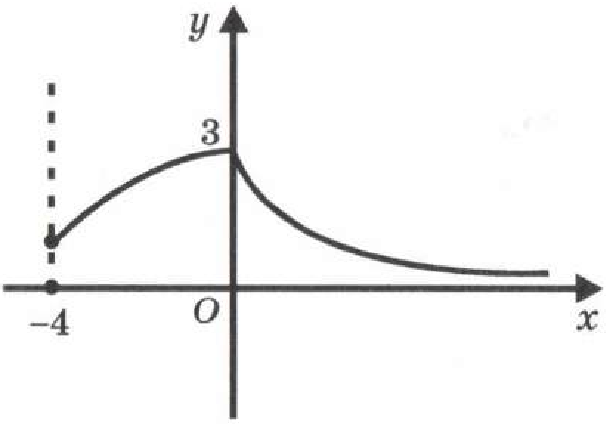
2) $[-4; 0]$ кисемтәсендә үсә; $[0; +\infty)$ нурында кими;

3) астан да, өстән дә чикләнгән;

4) y_{min} булмый, $y_{max} = 3$;

5) өзлексез;

6) $E(f) = (0; 3]$. ◼



Рәс. 101

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нинди функцияне үсә баручы, ниндиен кими баручы дип атыйлар?

2. Функциянең графигына карап, аның монотонлык араларын ничек табарга? Үз җавабыгызны нинди дә булса кисәкле функция графигы мисалында күрсәтегез.

3. Нинди функцияне астан чикләнгән, ниндиен өстән чикләнгән дип атыйлар?

4. Функциянең графигына карап, аның: а) астан чикләнгән; б) өстән чикләнгән; в) чикләнгән икәнлеген ничек белергә була?

5. Функциянең билгеләнү өлкәсендәге ниндидер аралыкта аның иң кечкенә (иң зур) кыйммәтенә билгеләмә бирегез.

6. Функциянең иң кечкенә кыйммәте барлыгы билгеле. Ул а) астан чикләнгән; б) өстән чикләнгән була аламы?

7. Функциянең иң зур кыйммәте барлыгы билгеле. Ул а) астан чикләнгән; б) өстән чикләнгән була аламы?

8. График юл белән бирелгән, ниндидер аралыкта астан чикләнгән һәм шул аралыкта иң кечкенә кыйммәтенә ирешә торган функциягә мисал китерегез.

9. График юл белән бирелгән, ниндидер аралыкта астан чикләнгән һәм шул аралыкта иң кечкенә кыйммәте булмый торган функциягә мисал китерегез.

10. График юл белән бирелгән, ниндидер аралыкта өстән чикләнгән һәм шул аралыкта иң зур кыйммәтенә ирешә торган функциягә мисал китерегез.

11. График юл белән бирелгән, ниндидер аралыкта өстән чикләнгән һәм шул аралыкта иң зур кыйммәте булмый торган функциягә мисал китерегез.

12. Аналитик бирелгән, ниндидер аралыкта өзлексез һәм түбәндәге шарт үтәлә торган функциягә мисал китерегез:

а) бу аралыкта иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә бар;

б) бу аралыкта иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;

в) бу аралыкта иң кечкенә кыйммәте бар, иң зур кыйммәте юк;

г) бу аралыкта иң кечкенә кыйммәте юк, иң зур кыйммәте бар.

§ 11. ҖӨП ҺӘМ ТАК ФУНКЦИЯЛӘР

Узган параграфта без функцияләрнең 7–8 нче сыйныфлар алгебра курсыннан сезгә күпмедер күләмдә таныш булган үзлекләрен генә карап чыктык. Бу параграфта сүз аларның ике яңа үзлеге турында барачак.

1 нче билгеләмә. Әгәр X күплегендәге x ның теләсә кайсы кыйммәте өчен

$$f(-x) = f(x)$$

тигезлеге үтәлсә, $y = f(x)$, $x \in X$ функциясен **җөп** дип атыйлар.

2 нче билгеләмә. Әгәр X күплегендәге x ның теләсә кайсы кыйммәте өчен

$$f(-x) = -f(x).$$

тигезлеге үтәлсә, $y = f(x)$, $x \in X$ функциясен **так** дип атыйлар.

1 нче мисал. $y = x^4$ нең җөп функция икәнен исбатларга.

Чишү. $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4$. Ләкин $(-x)^4 = x^4$. Димәк, теләсә кайсы x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге үтәлә, ягъни функция җөп була. ■

Шундый ук юл белән $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ функцияләренең дә так булуын исбатларга мөмкин.

2 нче мисал. $y = x^3$ нең так функция икәнен исбатларга.

Чишү. $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3$. Ләкин $(-x)^3 = x^3$. Димәк, теләсә кайсы x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге үтәлә, ягъни функция так була. ■

Шундый ук юл белән $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ функцияләренең дә так булуын исбатларга мөмкин.

Без сезнең белән математикадагы бик күп яңа атамаларның реаль тормыштан алынуын күреп килдек. Бу юлы да шундый ук хәл. Игътибар итегез: $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — так функцияләр, ә $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — җөп функцияләр. Һәм, гомумән, $y = x^n$ (биредә n — бөтен сан) рәвешендәге теләсә кайсы функция өчен шундый нәтиҗә ясап була: әгәр n – җөп сан булса, $y = x^n$ – җөп функция, әгәр n – так сан булса, $y = x^n$ так функция.

Җөп тә, так та булмаган функцияләр була. Мәсәлән, $y = 2x + 3$ функциясе. Чынлап та, бу функциянең $x=1$ һәм $x= -1$ нокталарындагы кыйммәтләрен чагыштырыйк: $f(1) = 5$, $f(-1) = 1$. Күргәнегезчә, биредә $f(-1) \neq f(1)$ һәм $f(-1) \neq -f(1)$. Димәк, $f(-x) = f(x)$ бердәйлеге дә, $f(-x) = -f(x)$ бердәйлеге дә үтәлә алмый.

Шулай итеп, функция так, җөп булырга, һәм так та, җөп тә булмаска мөмкин. Бирелгән функциянең бу үзлеген ачыклауны гадәттә *функцияне җөплеккә тикшерү* дип атыйлар.

1 нче һәм 2 нче билгеләмәләрдә функциянең x һәм $-x$ нокталарындагы кыйммәтләре турында сүз бара. Шуның белән, функция x һәм $-x$ нокталарында билгеләнә дип фаразлана. Бу $-x$ ноктасының x ноктасы белән бергә билгеләнү өлкәсенә керүен күрсәтә. Әгәр X саннар күплеге үзенең һәр x элементы белән бергә капма-каршы $-x$ элементын да үз эченә алса, X ны **симметрик күплек** дип атыйлар. Әйтик,$(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ – симметрик күплекләр, ә $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 4]$ – симметрик булмаган күплекләр. ***Әгәр $f(x)$ – җөп яки так функция булса, аның билгеләнү өлкәсе $D(f)$ – симметрик күплек була.*** Әгәр инде $D(f)$ – симметрик булмаган күплек икән, $f(x)$ функциясе так та, җөп тә булмый.

Функцияне җөплеккә тикшергәндә түбәндәге алгоритмны кулланырга тәкъдим итәбез.

$f(x)$ функциясен җөплеккә тикшерү алгоритмы

1. Функциянең билгеләнү өлкәсе $D(f)$ күплегенең симметриялеме, юкмы икәнен ачыкларга. Юк икән – функция так та, җөп тә түгел дип билгеләргә. Симметрияле икән, алгоритмның икенче адымына күчәргә.
2. $f(-x)$ өчен аңлатма төзергә.
3. $f(-x)$ һәм $f(x)$ ны чагыштырырга:

а) әгәр $f(-x) = f(x)$ булса, теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен функция җөп;

б) әгәр $f(-x) = -f(x)$ булса, теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен функция так;

в) әгәр кимендә бер $x \in D(f)$ ноктасында $f(-x) \neq f(x)$ булса, **һәм әгәр кимендә бер $x \in D(f)$ ноктасында $f(-x) \neq f(x)$ булса,** функция так та, җөп тә булмый.

3 нче мисал. Функцияне җөплеккә тикшерергә:

а) $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$;

б) $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Чишү. а) $y = f(x)$, биредә $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

1) Функция x аргументының $x=0$ дән башка барлык кыйммәтләрендә билгеләнгән. Димәк, $D(f)$ – симметрияле күплек.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

3) Функциянең билгеләнү өлкәсеннән теләсә кайсы x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге үтәлә.

Шулай итеп, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ – җөп функция.

б) $y = f(x)$, биредә $f(x) = x^5 - \frac{3}{x^3}$.

1) Функция x аргументының $x=0$ дән башка барлык кыйммәтләрендә билгеләнгән. Димәк, $D(f)$ – симметрияле күплек.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \frac{3}{(-x)^3} = -x^5 + \frac{3}{x^3} = -\left(x^5 - \frac{3}{x^3}\right)$.

3) Функциянең билгеләнү өлкәсеннән теләсә кайсы x өчен $f(-x) = -f(x)$ тигезлеге үтәлә.

Димәк, $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$ — так функция.

в) $y = f(x)$, биредә $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$.

1) Функция x ның вакланманың ваклаучысын нульгә әйләндерә торганнарыннан тыш, барлык нокталарында да билгеләнгән.

$x^2 - 9 \neq 0$ шартыннан $x \neq \pm 3$. Димәк, функциянең билгеләнү өлкәсе — 3 һәм –3 нокталарыннан башка барлык саннар турысы. Бу – симметрияле күплек.

2) $f(-x) = \frac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\frac{x+4}{x^2-9}$.

3) $f(-x)$ һәм $f(x)$ ны чагыштырып, $f(-x) = f(x)$ бердәйлеге дә, $f(-x) = -f(x)$ бердәйлеге дә үтәлмәвен күрәбез. Моңа ышану өчен x ның конкрет кыйммәтен, мәсәлән, $x=4$ не алабыз. Биредә $f(4) = 0$, ә $f(-4) = -\frac{8}{7}$. Димәк, $f(-4) \neq f(4)$ һәм $f(-4) \neq -f(4)$.

Шулай итеп, функция так та, җөп тә түгел.

г) $y = \sqrt{x-3}$ функциясе $x - 3 \geqslant 0$ шартында, ягъни $[3; +\infty)$ нурында билгеләнгән. Бу нур – симметрияле күплек түгел, димәк, функция так та, җөп тә була алмый. ◼

4 нче мисал. Функцияне җөплеккә тикшерергә:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$; в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;

б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$; г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Чишү. а) $D(f) = [-2; 2]$ – симметрияле күплек, һәм теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен $|-x| = |x|$ тигезлеге үтәлә. Димәк, бирелгән функция җөп була.

б) $D(f) = [-3; 3)$ – симметрияле булмаган күплек. Чынлап та, -3 ноктасы $[-3; 3)$ ярыминтервалына керә, ә капма-каршы 3 ноктасы бу ярыминтервалга керми. Димәк, функция так та, җөп тә түгел.

в) $D(f) = (-5; 5)$ – симметрияле күплек, һәм $(-5; 5)$ интервалындагы теләсә кайсы x өчен $(-x)^3 = -x^3$. Димәк, бирелгән функция так була.

г) Функция симметрияле булмаган күплектә бирелгән. Димәк, функция так та, җөп тә түгел. ◼

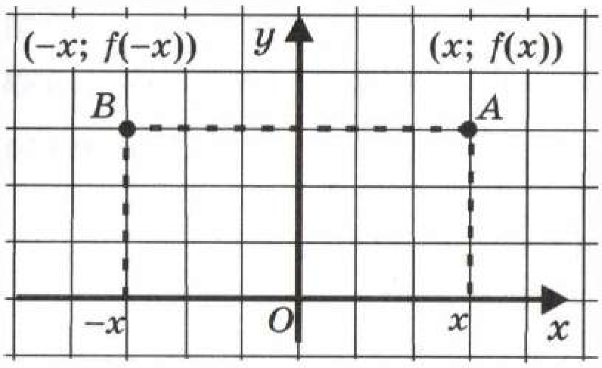
Хәзер функциянең җөп яки так булу үзлегенең геометрик мәгънәсен тикшерик.

Әйтик, $y = f(x)$ – җөп функция булсын, ягъни теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен $f(-x) = f(x)$. Функция графигының $A(x; f(x))$ һәм $B(-x; f(-x))$ нокталарын карыйк. $f(-x)=f(x)$ булганлыктан, A һәм B нокталарының абсциссалары – капма-каршы саннар, ә ординаталары бер үк.

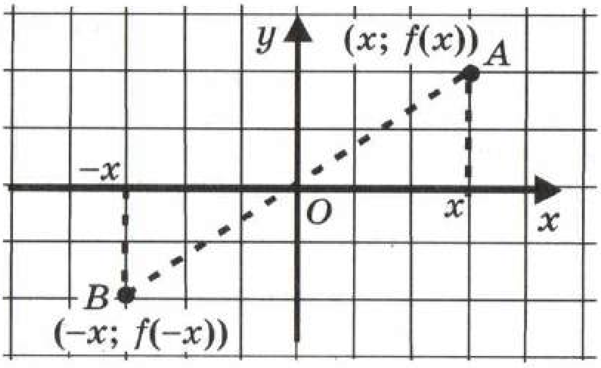
Бу нокталар y күчәренә карата симметрияле (102 нче рәсем).

Шулай итеп, $y=f(x)$ җөп функциясенең теләсә кайсы A ноктасы өчен шул ук графикта y күчәренә карата аңа симметрияле булган B ноктасы бар. Бу – ***җөп функциянең графигы y күчәренә карата симметрияле*** дигән сүз.

Әйтик, $y=f(x)$ – так функция, ягъни теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен $f(-x) = -f(x)$. Функция графигыннан $A(x;f(x))$ һәм $B(-x; f(-x))$ нокталарын карыйк. $f(-x) = -f(x)$ булганлыктан, A һәм B нокталарының абсциссалары да, ординаталары да капма-каршы



Рәс. 102



Рәс. 103

саннар. Бу нокталар координаталар башына карата симметрияле (103 нче рәсем). Шулай итеп, $f(x)$ так функциясе графигының теләсә кайсы A ноктасы өчен шул ук графикта координаталар башына карата аңа симметрияле B ноктасы бар. Бу – ***так функциянең графигы координаталар башына карата симметрияле*** дигән сүз.

Түбәндәге расламалар да дөрес:

1. ***Әгәр $y=f(x)$ функциясенең графигы ординаталар күчәренә карата симметрияле булса, $f(x)$ – җөп функция.***

Чынлап та, $y=f(x)$ функциясе графигының симметрияле булуы – функциянең билгеләнү өлкәсендәге теләсә кайсы x өчен $f(-x)=f(x)$ тигезлеге дөрес дигәнне аңлата, ягъни $y=f(x)$ – җөп функция.

2. ***Әгәр $y = f(x)$ функциясенең графигы координаталар башына карата симметрияле булса, $f(x)$ – так функция.*** $y = f(x)$функциясенең координаталар башына карата симметриясе функциянең билгеләнү өлкәсендәге теләсә кайсы x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге дөрес дигәнне аңлата, ягъни $f(x)$ – так функция.

5 нче мисал. Функцияне җөплеккә тикшерергә:

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Чишү. <u>Беренче юл.</u>

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2}$. Димәк, теләсә кайсы $x \in D(f)$ өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге дөрес, ягъни функция җөп була.

Икенче юл. Функциянең графигы – үзәге координаталар башында һәм радиусы 3 булган ярымәйләнә (78 нче рәсем). Ул y күчәренә карата симметрияле. Димәк, $y = \sqrt{9 - x^2}$ функциясе җөп дигән сүз. ■

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нинди функцияне җөп дип атыйлар?
2. Нинди функцияне так дип атыйлар?
3. Нинди очракта күплекне симметрияле дип атыйлар?
4. Күплекнең ни өчен симметрияле булмавын аңлатыгыз:

а) $(-3; 3)$; в) $[-1; 2]$; д) $\{-1, 2, 3, -2, -3, 1\}$.
б) $(-2; 2]$; г) $(-\infty; +\infty)$;

5. $y = f(x)$, $x \in [0; +\infty)$ функциясе җөп яки так була аламы?
6 Нинди дер функциянең графигына карап, аның:

а) җөп; б) так; в) так та, җөп тә түгел икәнен билгеләп буламы?

§ 12. $y = x^n$ $(n \in N)$ ФУНКЦИЯЛӘРЕ, АЛАРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИКЛАРЫ

$y = x^n$ рәвешендәге функцияне (биредә $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$) **натураль күрсәткечле дәрәҗәле функция** дип атыйлар.

Ике төрле дәрәҗәле функцияне: $y=x$ (ягъни $y=x^1$) һәм $y=x$ ны без инде өйрәндек. Ә менә $n=3$ тән башланган $y=x^n$ функцияләрен әлегә белмибез. $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$, $y=x^6$ һ. б. функцияләрнең графиклары нинди була? Алар нинди үзлекләргә ия? Бу параграфта әнә шулар турында сөйләшербез. Дөрес, аз гына алга китеп, § 11 та $y=x^4$ ның – җөп, ә $y=x^3$ ның так функция икәнен исбатладык. Һәм бу безгә хәзер кирәк булачак. Без бит җөп функция графигының ординаталар күчәренә карата, ә так функция графигының координаталар башына карата симметрияле икәнен беләбез. Димәк, $y=x^4$ һәм $y=x^3$ функцияләрен башта $[0;+\infty)$ нурында карарга, бу нурда аларның графикларын төзергә мөмкин. Ә аннан соң, симметриядән файдаланып, функция графигын барлык саннар турысында төзергә

һәм график ярдәмендә функциянең үзлекләрен (алда билгеләнгән схема буенча) санап чыгарга була.

1. $y = x^4$, $x \geqslant 0$ функциясе

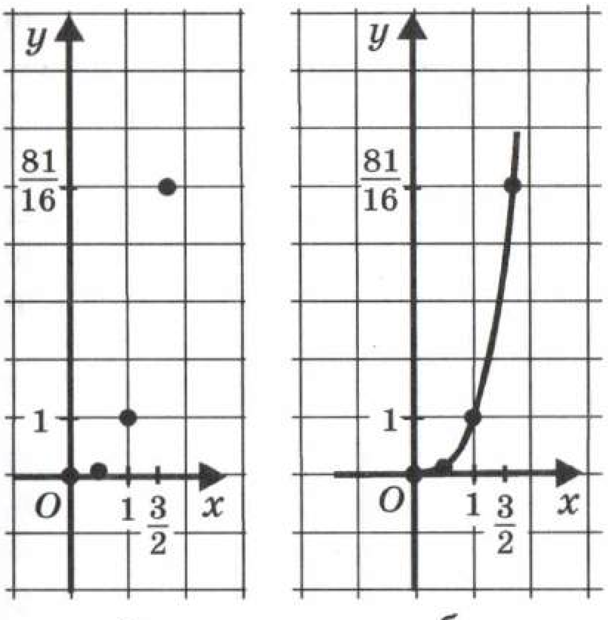
Бу функция өчен кыйммәтләр таблицасын төзибез

x	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y	0	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{81}{16}$

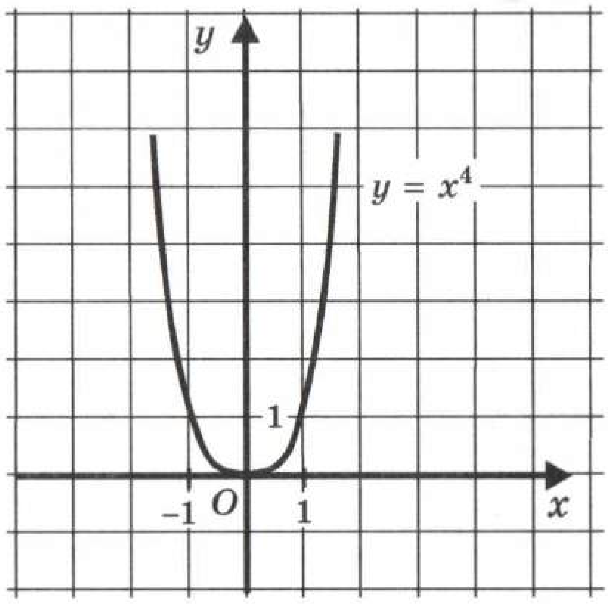
Координаталар яссылыгында (0; 0), (1; 1), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{81}{16}\right)$ нокталарын төзибез (104 нче *а* рәсем), алар ниндидер сызыкны билгелиләр, һәм шул сызыкны үткәрәбез (104 нче *б* рәсем).

2. $y = x^4$ функциясе

104 нче *б* рәсемендә сурәтләнгән графикка ординаталар күчәренә карата аңа симметрияле сызык өстәп, $y = x^4$, $x \in (-\infty; +\infty)$ функциясенең графигын табабыз. Ул параболага ошаган (аны парабола дип йөртәләр дә).



Рәс. 104



Рәс. 105

Функциянең үзлекләрен саный башлаганчы, §10 та кулланылган тәртипкә бер үзгәреш кертәбез: функциянең җөп яки таклыгын икенче урынга куярбыз.

$y = x^4$ функциясенең үзлекләре

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2. җөп функция;
3. $(-\infty; 0]$ нурында кими, $[0; +\infty)$ нурында үсә;
4. астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән;
5. $y_{min} = 0$; y_{max} булмый;
6. өзлексез;
7. $E(f) = [0; +\infty)$;
8. аска таба кабарынкы.

Бу үзлекләрне без графиктан укыдык һәм, билгеле, исбатлаулар үткәрелмәде. Математикада киресе эшләнергә тиеш, башта үзлекләр тикшерелә, аннан соң график сызыла. Ә без хәзергә моны тиешенчә эшләргә әзер түгел. Санап үтелгән сигез үзлектән беренчесе генә аныклы (чөнки теләсә нинди x санын дүртенче дәрәҗәгә күтәрергә мөмкин). Узган параграфта икенче үзлек исбатланды. Өченчесен дә исбатлап була: әгәр $x_1>x_2\geqslant 0$ икән, санлы тигезсезлекләр үзлеге буенча $x_1^4 > x_2^4$ һәм бу функциянең $[0;+\infty)$ нурында үсүен күрсәтә.

Дүртенче һәм бишенче үзлекләрне дә исбатлыйк. Әйтик, $x^4 \geqslant 0$ булсын. Бу функциянең астан чикләнгәнлеген аңлата. Ә ул өстән чикләнгән дип фаразлыйк, ягъни теләсә кайсы x өчен $x^4 < M$ тигезсезлеге үтәлә торган уңай M саны бар дип уйлыйбыз. Натураль $n>M$ санын алып, $y = x^4$ функциясенең $x_0 = n$ ноктасында кыйммәтен карыйбыз:

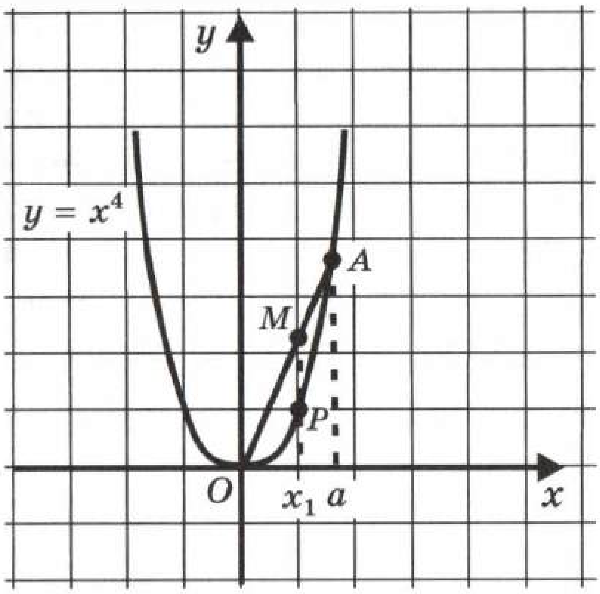
$$f(x_0) = n^4 \geqslant n > M.$$

Шулай итеп, без $f(x_0) > M$ тигезсезлеге үтәлә торган x_0 ноктасын таптык, ә бу безнең өстән чикләнгәнлек турындагы фаразыбызга каршы килә. Димәк, функция өстән чикләнмәгән, һәм шунлыктан аның иң зур кыйммәте була алмый. Шул ук вакытта $y_{min}=0$ икәне ачык күренә.

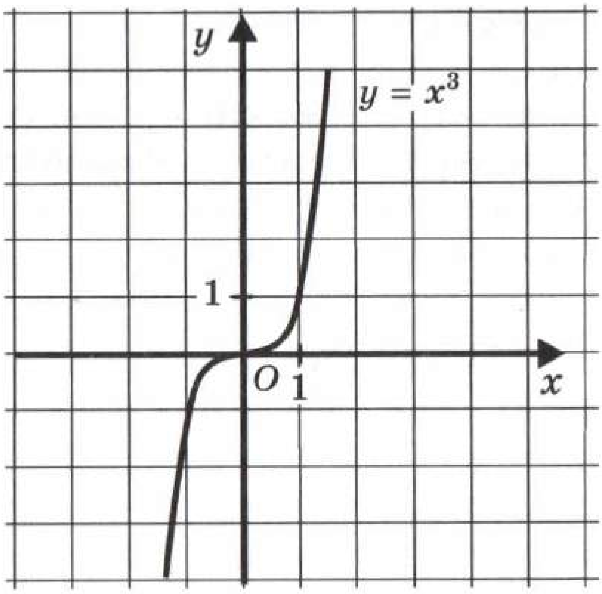
Геометрик күзаллауларга нигезләнгән 6,7 һәм 8 нче үзлекләр генә калды.

Хәер, функциянең аска таба кабарынкылыгы үзлегенә аңлатма биреп карарга мөмкин. Мәсәлән, $[0; a]$ кисемтәсендә (биредә $a > 0$) $y=x^4$ функциясе графигының OA кисемтәсеннән астарак урнашуын күрсәтик (106 нчы рәсем).

$(0; a)$ интервалында ирекле x_1 ноктасын алабыз һәм бу ноктада x күчәренә $y=x^4$ функциясе графигы (P ноктасында) һәм OA турысы



Рәс. 106



Рәс. 107

(*M* ноктасында) белән кисешкәнче перпендикуляр үткәрәбез (106 нчы рәсем). *P* ноктасының ординатасы x_1^4 була. *M* ноктасының ординатасын ачыклыйк.

OA турысы координаталар башы аша үтә, димәк, аның тигезләмәсе $y = kx$ була. Бу туры $A(a;\ a^4)$ ноктасы аша үтә. A ноктасы координаталарын $y = kx$ тигезләмәсенә куеп, $a^4 = ka$ икәнен табабыз. Димәк, $kx = a^3$, ягъни *OA* турысының тигезләмәсе $y = a^3x$ була. Шулай булгач, *M* ноктасының ординатасы a^3x_1 гә тигез.

Шулай итеп, *P* ноктасының ординатасы x_1^4 нә, ә *M* ноктасы ординатасы a^3x_1 гә тигез. Бу саннарның кайсы зуррак икәнен ачыклыйбыз. $0 < x_1 < a$ икәне билгеле, санлы тигезсезлекләр үзлекләре буенча $x_1^3 < a^3$ һәм $x_1^3 \cdot x_1 < a^3 \cdot x_1$, ягъни $x_1^4 < a^3x_1$. Соңгы тигезсезлек *P* ноктасының *M* ноктасыннан түбәнрәк урнашуын аңлата. Моннан нәтиҗә ясый алабыз: әгәр ирекле *OA* турысы үткәрсәк, $y = x^4$ функциясенең графигы $[0;a)$ кисемтәсендә бу турының тиңдәшле кисемтәсеннән астарак урнаша.

3. $y = x^3$ функциясе

Барыннан да элек $y = x^3$ функциясенең так булуын һәм графигының координаталар башына карата симметрияле икәнен искәртик.

$y = x^3$ функциясе графигы $x \geqslant 0$ булганда $y=x^4$ $(x>0)$ функциясе графигына ошаган (104 нче *б* рәсем), яңа сызыкның текәлеге кимрәк һәм координаталар башы тирәсендә *x* күчәреннән бераз гына ераграк урнаша. Бу сызыкка координаталар башына карата аңа симметрияле сызык өстәп, $y = x^3$ функциясенең графигын табабыз (107 нче рәсем). Бу кәкрене **куб парабола** дип атыйлар.

Искәрмә. Биредә — математиклар бик үк уңышлы булмаган атама куллана торган сирәк очракларның берсе. Парабола – билгеле бер үзлекләре булган геометрик фигура. 107 нче рәсемдә сурәтләнгән сызык бу үзлекләргә ия түгел, шуңлыктан аңа «парабола» атамасын кулланмыйча, башка исем бирергә булыр иде («куб парабола» – «квадрат әйләнә» кебегрәк яңгырый). Әмма атама инде күптән кулланыла һәм безгә дә аны шулай кулланырга туры киләчәк.

Куб параболаның, $y = x^3$ ның геометрик үзенчәлекләре: аның симметрия үзәге ((0;0) ноктасы) бар, ул кәкрене ике симметрик өлешкә бүлә; бу өлешләрне куб параболаның тармаклары дип йөртәләр. Игътибар итегез: куб параболаның бер тармагы, координаталар башы аша үтеп, икенчесенә күчкәндә сынулар ясамый, салмак һәм x күчәренә орынып үтә.

$y = x^3$ функциясенең үзлекләре

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) так функция;
3) үсә баручы;
4) астан да, өстән дә чикләнмәгән;
5) иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;
6) өзлексез;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) $(-\infty; 0]$ дә өскә таба кабарынкы, $[0; +\infty)$ тә өскә таба кабарынкы.

4. $y = x^{2n}$ функциясе

Сүз $y = x^6$, $y = x^8$ һәм, гомумән, дәрәҗә күрсәткече натураль җөп сан булган дәрәҗәле функция турында бара. Теләсә кайсы шундый функциянең графигы $y = x^4$ функциясе графигына охшаган (к.: 105 нче рәсем), тик аның тармаклары өскә таба текәрәк юнәлгән була.

$y = x^{2n}$ кәкресе *x күчәренә* (0;0) *ноктасында орына.* Геометрик яктан, кәкренең бер тармагы икенчесенә x күчәренә бик якын килеп, салмак күчә диярга мөмкин. Орынуның төгәл билгеләмәсен 10 нче сыйныфта өйрәнерсез.

5. $y = x^{2n+1}$ функциясе

Сүз $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ һәм, гомумән, дәрәҗә күрсәткече натураль так сан булган дәрәҗәле функция турында бара. Теләсә

кайсы шундый функциянең графигы $y = x^3$ функциясе графигына ошаган (107 нче рәсем), тик күрсәткеч зуррак булган саен, график тармаклары өскә (һәм аска) текәрәк юнәлә. Шулай ук $y = x^{2n+1}$ кәкресенең *x күчәренә* (0;0) *ноктасында орынуын күрәбез.*

1 нче мисал. $x^5 = 3 - 2x$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. 1) $y = x^5$ һәм $y = 3 - 2x$ функцияләрен карыйбыз.

2) $y = x^5$ функциясе графигын төзибез (108 нче рәсем).

3) $y = 3 - 2x$ сызыкча функциясенең графигын төзибез. Ул (0;3) һәм (1;1) нокталары аша узучы туры (108 нче рәсем).

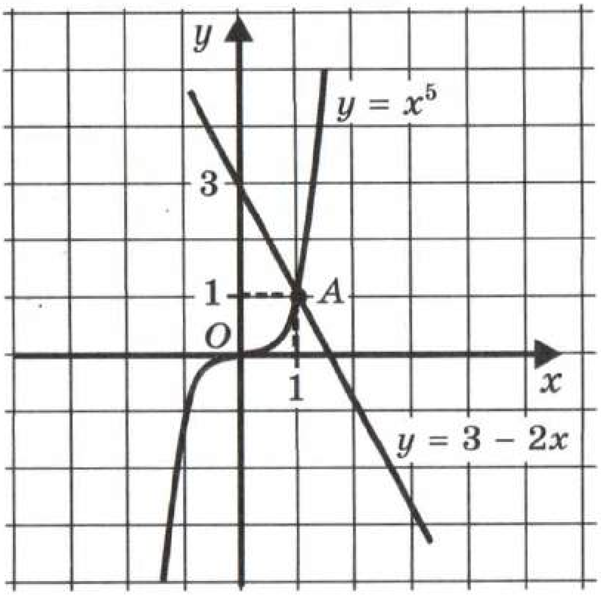
4) Сызымнан күренгәнчә, төзелгән графиклар $A(1;1)$ ноктасында кисешәләр. Тикшерү чынлап та $A(1;1)$ ноктасы координаталарының $y = x^5$ тигезләмәсен дә, $y = 3 - 2x$ тигезләмәсен дә канәгатьләндерүен күрсәтә. Димәк, тигезләмәнең бер тамыры бар: $x = 1$ – бу A ноктасының абсциссасы.

Җавап: $x = 1$.

108 нче рәсемдә сурәтләнгән геометрик модель кайвакыт шактый катлаулы тигезләмәләрне җиңел генә чишәргә мөмкинлек бирүче расламаны күрсәтә.

Әгәр $y = f(x)$ функциясе үсә баручы, ә $y = g(x)$ функциясе кими баручы булып, $f(x) = g(x)$ тигезләмәсенең бер тамыры бар икән, бу тамыр бердәнбер була.

Бу расламаны исбатлыйбыз. Әйтик, $f(x) = g(x)$ тигезләмәсенең x_1 тамырыннан тыш, тагын x_2 тамыры да бар дип фаразлыйбыз, $x_1 < x_2$ булсын. Әлеге x_1 һәм x_2 – бирелгән тигезләмәнең тамыр-



Рәс. 108

лары булганлыктан, $f(x_1) = g(x_1)$ һәм $f(x_2) = g(x_2)$ тигезлекләре үтәлә. $y = f(x)$ функциясе үсә баручы, шунлыктан $f(x_1) < f(x_2)$; $y = g(x)$ — кими баручы, шуңа күрә $g(x_1) > g(x_2)$ тигезсезлекләре үтәлә. Шулай итеп, $f(x_2) > f(x_1) = g(x_1) > g(x_2)$. Моннан $f(x_2) > g(x_2)$ килеп чыга.

Шулай ук фикер йөртеп, $x_1 > x_2$ булганда, $f(x_2) < g(x_2)$ икәнен исбатларга мөмкин. Һәр очракта $f(x_2) \neq g(x_2)$ килеп чыга, ягъни x_2 тигезләмәнең тамыры булмый. Димәк, тигезләмәнең бары бер генә тамыры бар, раслама исбатланды.

Бу расламага нигезләнеп, без 1 нче мисалдагы тигезләмәне болай чишә ала идек:

1) $x = 1$ булганда

$$1^5 = 3 - 2 \cdot 1$$

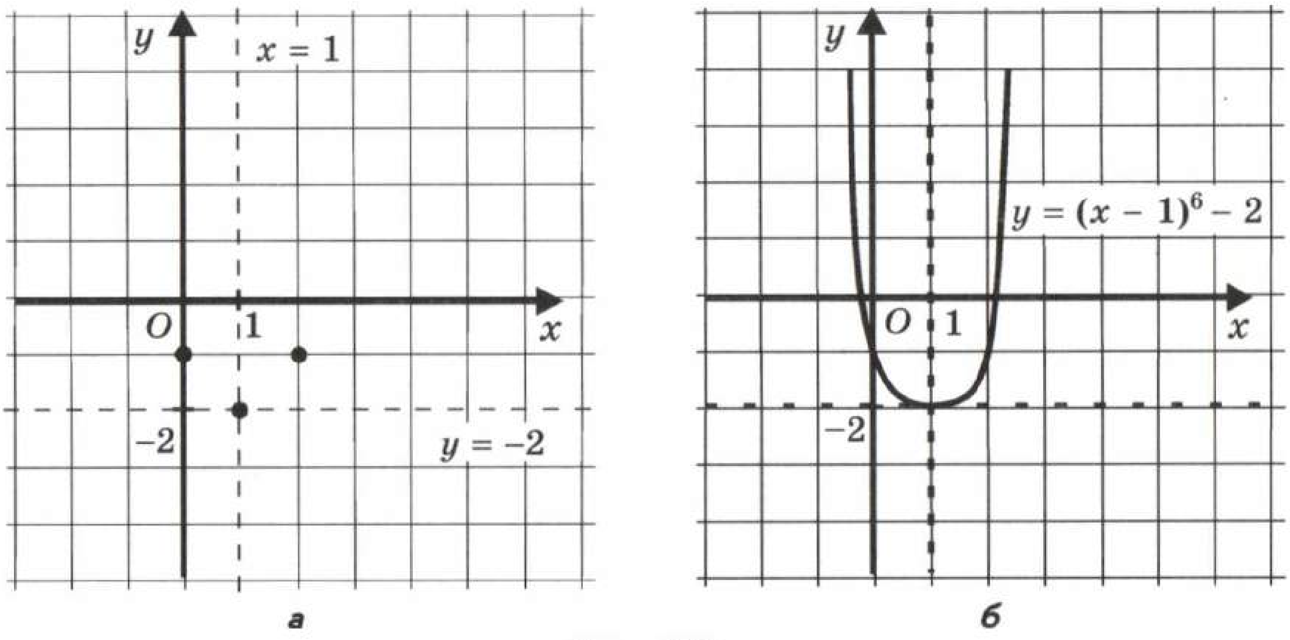
тигезлеге үтәлә, димәк, $x = 1$ – тигезләмәнең тамыры (бу тамырны без очраклы куйдык);

2) $y = 3 - 2x$ функциясе кими баручы. Ә $y = x^5$ функциясе үсә баручы, димәк, бу тигезләмәнең тамыры бер генә була һәм бу тамыр – без тапкан $x = 1$ кыйммәте.

8 нче сыйныф алгебра курсында без $y = f(x)$ функциясе графигын белгән очракта $y = f(x + m) + l$ функциясе графигын төзү юлларын өйрәнгән идек. Шуны искә төшерик.

2 нче мисал. $y = (x - 1)^6 - 2$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. 1) Башы $(1;-2)$ ноктасында булган ярдәмче координаталар системасына күчәбез ($x = 1$ һәм $y = -2$ пунктир турылары, 109, *а* рәсем).



Рәс. 109

2) $y = x^6$ функциясен яңа координаталар системасына «бәйлибез». Моның өчен $y = x^6$ функциясе өчен контроль нокталар сайлыйбыз: (0;0), (1;1), (−1,1), ләкин аларны яңа координаталар системасында төзибез (бу нокталар 109, *а* рәсемендә билгеләнгән). Аннан соң бу нокталар аша 105 нче рәсемдә үткәрелгән графикка охшаш сызык үткәрәбез – бу безгә кирәкле график була (109, *б* рәсем). Төгәлрәк итеп әйтсәк, таләп ителгән графикның эскизын сыздык. ◀■

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясе графигын схематик рәвештә күрсәтегез.

2. $y = x^{2n+1}$, $n \in N$ функциясе графигын схематик рәвештә күрсәтегез.

3. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясенең графигы симметрияле буламы? Нәрсәгә карата?

4. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясе җөп яки так буламы?

5. $y = x^{2n+1}$, $n \in N$функциясенең графигы симметрияле буламы? Нәрсәгә карата?

6. $y = x^{2n+1}$, $n \in N$ функциясе җөп яки так буламы?

7. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе нинди?

8. $y = x^{2n+1}$, $n \in N$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе нинди?

9. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{2n}$, $n \in N$, функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда кими;

б) $y = x^{2n}$, $n \in N$, функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда үсә;

в) $y = x^{2n}$, $n \in N$, функциясе $x \geqslant 0$ һәм функциясе $x \leqslant 0$ булганда кими;

г) $y = x^{2n}$, $n \in N$, функциясе $x \geqslant 0$ һәм функциясе $x \leqslant 0$ булганда үсә?

10. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда үсә һәм $x < 0$ булганда кими;

б) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда үсә һәм $x < 0$ булганда үсә;

в) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ һәм функциясе $x < 0$ булганда кими;

г) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ һәм функциясе $x < 0$ булганда үсә?

11. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы;

б) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы;

в) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы;

г) $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы?

§ 13. $y = x^{-n}$ $(n \in N)$ ФУНКЦИЯЛӘРЕ, АЛАРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИКЛАРЫ

Безгә киләчәктә кирәк була торган функцияләр классын өйрәнүне дәвам итәбез. Узган параграфта без $y = x^n$ натураль күрсәткечле дәрәҗәле функцияләрне тикшергән идек, бусында $y = x^{-n}$ рәвешендәге функцияләрне өйрәнербез. Аларны **тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗәле функция** диләр.

Тискәре күрсәткечле дәрәҗәләрнең билгеләмәсе буенча

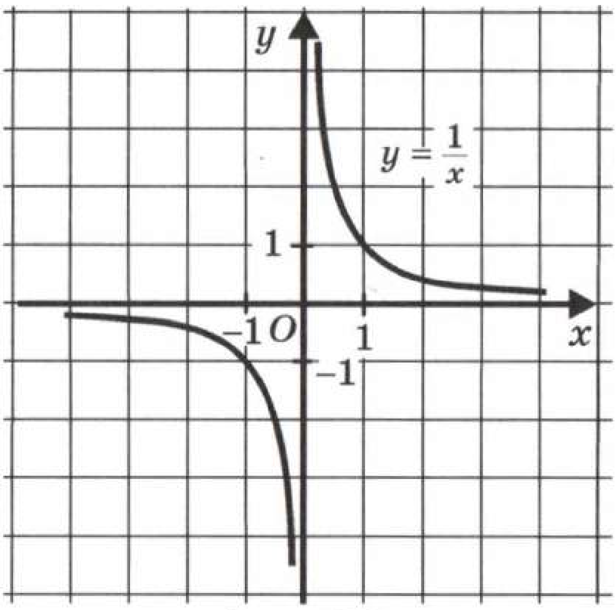
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Шунлыктан, $y = x^{-n}$ урынына $y = \frac{1}{x^n}$ язылышын кулланабыз.

Әлеге рәвештәге функцияләрнең берсен — $y = \frac{1}{x}$ — без 8 нче сыйныфта өйрәндек. Сезгә бу функциянең үзлекләре таныш, аның графигы гипербола була (110 нчы рәсем). Тагын бер адым алга китеп, $y = \frac{1}{x^2}$ функциясен карыйбыз. Узган параграф тәҗрибәсенә таянып ($y = x^4$ функциясенең җөп, $y = x^3$ функциясенең таклыгын файдаланудан башлаган идек), $y = \frac{1}{x^2}$ функциясен дә җөплеккә тикшерәбез.

Шулай итеп, $y = \frac{1}{x^2}$ нең *җөп функция* икәнен исбатлыйбыз.

Барыннан да элек, функциянең билгеләнү өлкәсенең $x = 0$



Рәс. 110

кыйммәтеннән башка барлык реаль саннар күплеге икәнен искәртик, бу – симметрияле күплек. Исәплибез: $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$; шулай итеп, функциянең билгеләнү өлкәсендәге теләсә кайсы x өчен $f(-x) = f(x)$ тигезлеге үтәлә. Димәк, $y = \frac{1}{x^2}$ – җөп функция дигән сүз.

$y = \frac{1}{x^2}$ функциясенең җөплек үзлеге безгә бик файдалы булачак. Без бит җөп функция графигының ординаталар күчәренә карата симметрияле икәнен беләбез. Димәк, функциянең графигын $(0; +\infty)$ нурында гына эшләп, симметрия үзлеге буенча, барлык саннар турысында төзеп бетерергә һәм шуның ярдәмендә функциянең үзлекләрен санап чыгарга мөмкин.

1. $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ функциясе

Моңарчы эшләгән схема буенча дәвам итсәк, башта функциянең графигын төзергә, аннан соң үзлекләрен санап чыгарга тиеш идек. Әмма бу юлы, функцияләрне тикшерү тәҗрибәбезгә таянып, нәкъ математика таләп иткәнчә, киресеннән башларбыз. Башта $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ функциясенең үзлекләрен тикшерик. Гадәттәгечә, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ дип билгелибез.

1. $D(f) = (0; +\infty)$. Моны тикшереп торасы да юк.

2. Функция кими баручы. Чынлап та, әгәр $0 < x_1 < x_2$ икән, санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре буенча $x_1^2 < x_2^2$; $\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$ икәнен табабыз. Шулай итеп, $x_1 < x_2$ дән $f(x_1) > f(x_2)$ килеп чыкканлыктан, бу функция кими баручы була.

3. Функция астан чикләнгән һәм өстән чикләнмәгән. Астан чикләнгәнлекне $\frac{1}{x^2} > 0$ ачыктан-ачык тигезсезлеге күрсәтеп тора. Хәзер функция өстән дә чикләнгән дип фаразлап, теләсә кайсы $x > 0$ өчен $\frac{1}{x^2} < M$ үтәлә торган уңай M саны бар дип уйлыйк. Әйтик $x_0 = \frac{1}{\sqrt{M+1}}$ булсын. Ул вакытта

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0^2} = 1 : \frac{1}{M+1} = M + 1 > M.$$

Шулай итеп, функциянең кыйммәте M ноктасыннан зуррак булган нокта барлыгын күрәбез – бу безнең фаразга каршы килә. Димәк, функция өстән чикләнмәгән.

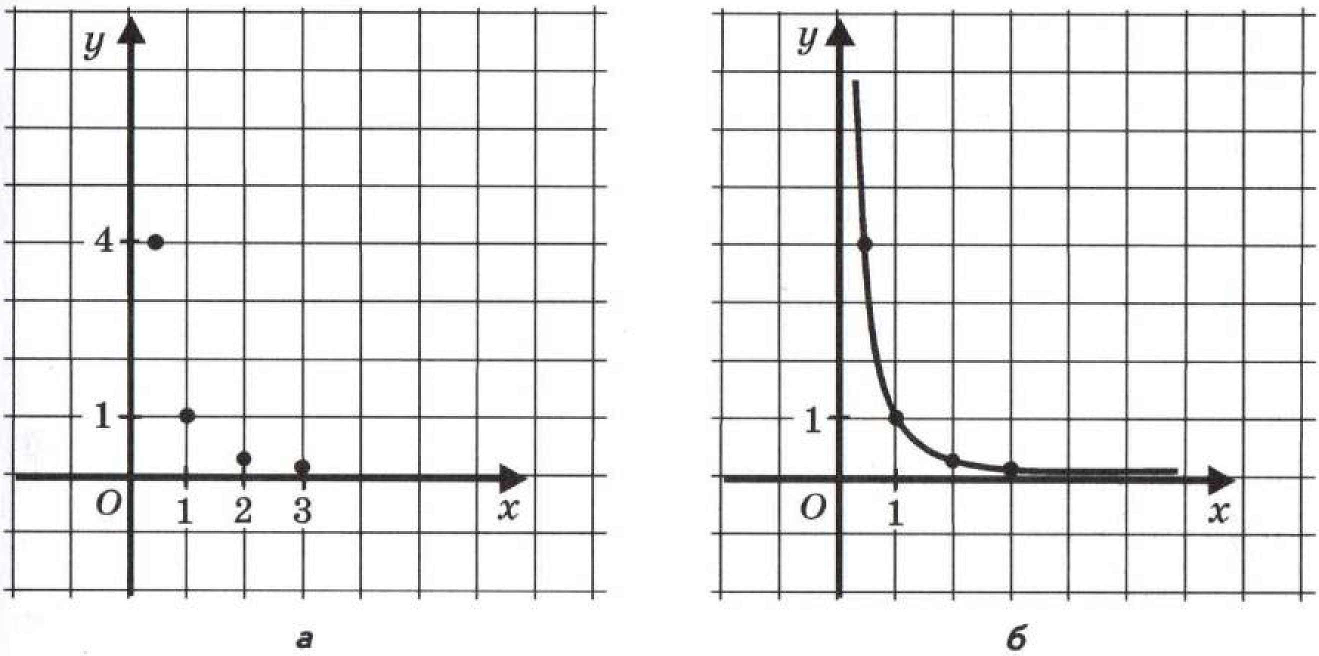
4. Функциянең иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк. Иң зур кыйммәтнең булмавы функциянең өстән чикләнмәвеннән килеп чыга. Ә функция астан чикләнгән булса да, иң кечкенә кыйммәт юклыгын исбатларга туры киләчәк. Болай фикер йөртәбез.

Иң кечкенә кыйммәт бар дип фаразлыйбыз. Димәк, теләсә нинди $x > 0$ өчен $f(x) \geqslant f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлә торган x_0 ноктасы бар, дип уйлыйбыз. Әмма функциянең кими баручы булуыннан күрәбез: әгәр $x_1 > x_0$ ноктасын алабыз икән, $f(x_1) < f(x_0)$ тигезсезлеге үтәләчәк. Ә бу безнең фаразга каршы килә. Шулай булгач, функциянең иң кечкенә кыйммәте булмаячак.

Хәзер функциянең графигын төзибез.

Моның өчен функциянең кыйммәтләре таблицасын тутырабыз.

x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
y	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



Рәс. 111

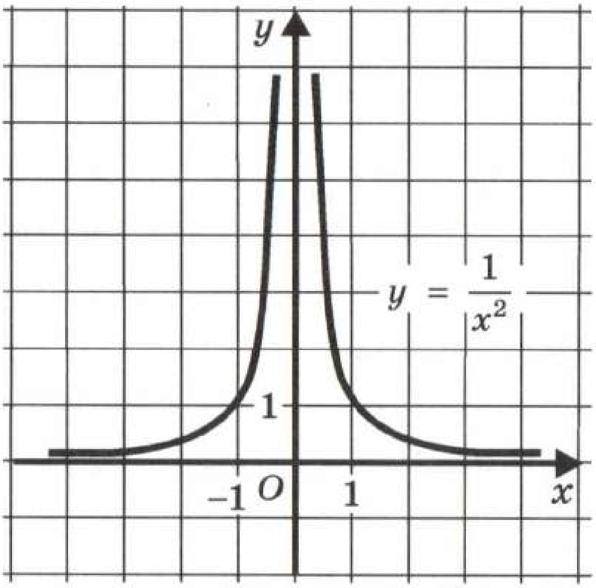
Координаталар яссылыгында, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(3; \frac{1}{9}\right)$ нокталарын төзибез (111, *а* рәсем), алар билгеләгән сызыкны, 2,3,4 үзлекләрен кулланып, үткәреп бетерәбез (111, *б* рәсем).

2. $y = x^{-2}$ функциясе

111, *б* рәсемдә сурәтләнгән графикка ординаталар күчәренә карата симметрияле тармак өстәп, $y = \frac{1}{x^2}$, ягъни $y = x^{-2}$ функциясе графигын табабыз (112 нче рәсем).

$y = x^{-2}$ функциясенең үзлекләре

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
2) җөп функция;
3) $(0; +\infty)$ ачык нурында кими, $(-\infty; 0)$ ачык нурында үсә;
4) астан чикләнгән, өстән чикләнмәгән;
5) иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;
6) $x < 0$ булганда (ягъни $(-\infty; 0)$ ачык нурында) өзлексез;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) $x < 0$ һәм $x > 0$ булганда аска таба кабарынкы.



Рәс. 112

3. $y = x^{-2n}$ функциясе

Сүз биредә $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^6}$, $y = \frac{1}{x^8}$ һ. б. функцияләр турында бара. Теләсә кайсы шундый функциянең графигы $y = \frac{1}{x^2}$ функциясе графигына охшаш була (112 нче рәсем). Шунысын искәртик, $y = \frac{1}{x^{2n}}$ кәкресе *координата күчәрләренә асимптотик якыная*. Шулай ук x күчәре (ягъни $y = 0$ турысы) $y = \frac{1}{x^{2n}}$ функциясе графигының *горизонталь асимптотасы*, ә y күчәре ($x = 0$ турысы) бу графикның *вертикаль асимптотасы* була дип тә әйтәләр.

4. $y = x^{-(2n-1)}$ функциясе

Биредә сүз $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^5}$ һ. б. функцияләр турында бара. Теләсә кайсы шундый функциянең графигы $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ графигына охшаш (к.: 110 нчы рәсем)

Шулай ук x күчәре $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ функциясе графигының *горизонталь асимптотасы*, ә y күчәре бу графикның *вертикаль асимптотасы* булуын искәртәбез.

$y = x^{-(2n-1)}$ **функциясенең үзлекләре**

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) так функция;

3) $(0; +\infty)$ ачык нурында кими һәм $(-\infty; 0)$ ачык нурында үсә;

4) астан да, өстән дә чикләнмәгән;

5) иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;

6) $x < 0$ һәм $x > 0$ булганда өзлексез;

7) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

8) $x < 0$ булганда — өскә таба, $x > 0$ булганда аска таба кабарынкы.

1 нче мисал. $y = \frac{1}{x^2}$ функциясенең бирелгән аралыктагы иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга:

а) $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$; б) $\left[-2; -\frac{1}{3}\right)$; в) $[1; +\infty)$.

Чишү. а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ билгеләнешен кертәбез. Функция $x > 0$, булганда кими, шунлыктан ул иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләренә бу аралыкның уң һәм сул очларында ирешергә мөмкин (билгеле, бу очлар аралыкка кергән очракларда). Безнең очракта:

$$y_{min} = f(3) = \frac{1}{9}, \; y_{max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

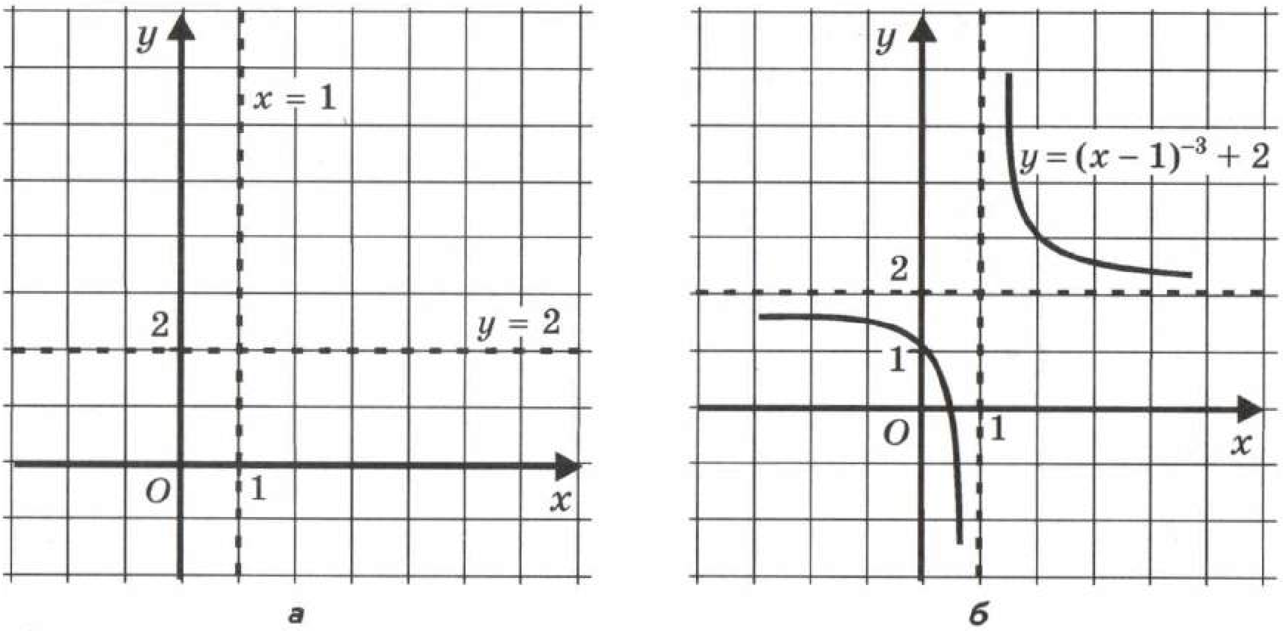
б) Функция $x < 0$, булганда үсә һәм, димәк, ул үзенең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләренә бары тик бу аралыкның очларында гына (тиңдәшле рәвештә сул һәм уң) ирешәчәк (әгәр очлар аралыкка керсәләр, әлбәттә). Бу очракта $y_{min} = f(-2) = \frac{1}{4}$, ә y_{max} булмый (уң оч бирелгән аралыкка керми).

в) Функциянең графигы ярдәмендә (112 нче рәс.), y_{min} ның булмавын, ә $y_{max}=1$ икәнен билгелибез. ◙

2 нче мисал. $y = (x-1)^{-3} + 2$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. 1) Координаталар башы (1;2) ноктасында булган ярдәмче системага күчәбез ($x = 1$ һәм $y = 2$ пунктир турылар, 113, *а* рәсем).

2) $y = x^{-3}$ функциясен яңа координаталар системасына «бәйлибез» һәм бу бирелгән функция графигы була (113, *б* рәсем). ◙



Рәс. 113

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясе графигын схематик рәвештә күрсәтегез.

2. $y = x^{(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе графигын схематик рәвештә күрсәтегез.

3. $y = x^{-2n}$, $n \in N$ функциясенең графигы симметрияле буламы? Нәрсәгә карата?

4. $y = x^{-2n}$, $n \in N$ функциясе җөп яки так буламы?

5. $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясенең графигы симметрияле буламы? Нәрсәгә карата?

6. $y = x^{(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе җөп яки так буламы?

7. $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе нинди?

8. $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе нинди?

9. $y = f(x)$ функциясе графигының асимптотасы нәрсә ул?

10. $y = x^{-2n}$, $n \in N$ функциясе графигы асимптоталарының тигезләмәләрен языгыз.

11. $y = x^{(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе графигы асимптоталарының тигезләмәләрен языгыз.

12. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда кими;

б) $y = x^{2n}$, $n \in N$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда үсә;

в) $y = x^{-2n}$, $n \in N$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда кими һәм $x \leqslant 0$ булганда кими;

г) $y = x^{-2n}$, $n \in N$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда кими һәм $x \leqslant 0$ булганда үсә?

13. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда үсә һәм $x < 0$ булганда кими;

б) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда үсә һәм $x < 0$ булганда үсә;

в) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда кими һәм $x < 0$ булганда кими;

г.) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда кими һәм $x < 0$ булганда үсә?

14. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы;

б) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда өскә кабарынкы;

в) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда аска кабарынкы һәм $x < 0$ булганда өскә кабарынкы;

г) $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$ функциясе $x > 0$ булганда аска кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы?

§ 14. $y = \sqrt[3]{x}$, ФУНКЦИЯСЕ, АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ ҺӘМ ГРАФИГЫ

1 нче билгеләмә. Әгәр $b^3 = a$ тигезлеге үтәлсә, b санын a **санынnetworks куб тамыр (яки өченче дәрәҗә тамыр)** дип атыйлар.

$\sqrt[3]{a} = b$ дип язалар; a — *тамырасты саны*, 3 — *тамыр күрсәткече.* Шулай итеп, $\sqrt[3]{a} = b$, $b^3 = a$ һәм $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ язылышлары эквивалент була, ягъни реаль a һәм b саннары арасындагы бер үк бәйләнешне аңлаталар. Кыскарак итеп болай да язарга мөмкин: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$; $\Leftrightarrow$ — *эквивалентлык тамгасы.*

Мәсәлән, $\sqrt[3]{27} = 3$, чөнки $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{1} = 1$, чөнки $1^3 = 1$; $\sqrt[3]{0} = 0$, чөнки $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, чөнки $(-4)^3 = -64$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \frac{3}{2}$, чөнки $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Теләсә кайсы a санының куб тамыры $\sqrt[3]{a}$ була. Бу раслама югары математикада исбатлана. Без аннан исбатлаусыз гына

файдаланырбыз. Куб тамыр алу нәтиҗәсе чагыштырмача сирәк кенә рациональ сан була. Күбрәк иррациональ сан килеп чыга һәм аның якынча кыйммәтен генә табарга туры килә.

Мисал өчен $\sqrt[3]{5}$ нең иррациональ сан икәнен исбатлыйк. Киресенчә, $\sqrt[3]{5}$нең рациональ сан дип фаразлыйк, ягъни $\sqrt[3]{5} = \frac{m}{n}$: биредә $\frac{m}{n}$ – кыскармаучан гади вакланма. Ул чагында $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$, ягъни $m^3 = 5n^3$. Соңгы тигезлек $m^3 \vdots 5$ икәнен күрсәтә, ягъни m^3 саны 5 кә калдыксыз бүленә. ($\vdots$ тамгасының «бүленә» мәгънәсен аңлатуын исегезгә төшерәбез).

Әмма бу $m \vdots 5$ үтәлгәндә һәм бары тик шунда гына мөмкин, ягъни $m = 5k$, биредә k – ниндидер натураль сан. $5k$ аңлатмасын m урынына $m^3 = 5n^3$ тигезлегенә куябыз; $(5k)^3 = 5n^3$ килеп чыга, моннан $n^3 = 25k^3$. Соңгы тигезлек $n^3 \vdots 25$ һәм $n \vdots 5$ үтәлүен күрсәтә. Моннан $n \vdots 5$.

Шулай итеп, $m \vdots 5$ һәм $n \vdots 5$ килеп чыкты. Димәк, $\frac{m}{n}$ вакланмасын кыскартып була (санаучысы да, ваклаучысы да 5 кә бүленә), ә бу $\frac{m}{n}$ – кыскармый дигән шартка каршы килә.

Каршылык безнең $\sqrt[3]{5}$ санының рациональлеге турында фаразыбызның дөрес булмавын күрсәтә, димәк, $\sqrt[3]{5}$ – иррациональ сан.

Уңай саннан өченче дәрәҗә тамыр – уңай сан, ә тискәре саннан өченче дәрәҗә тамыр – тискәре сан. Бу – санны кубка күтәргәндә санның тамгасы үзгәрмәгәннән килеп чыга. Түбәндәге бердәйлек дөрес:

$$\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}.$$

Чынлап та, $\sqrt[3]{-x} = b$, ә $\sqrt[3]{x} = c$ булсын, ди. Ул вакытта $b^3 = -x$, ә $c^3 = x$. Моннан $b^3 = -c^3$, яки $b^3 = (-c)^3$ икәне килеп чыга. Соңгы тигезлектән $b = -c$, ягъни $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ ны табабыз.

1 нче мисал. Исбатларга:

а) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$; б) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $(b \neq 0)$.

Чишү. Исәплибез:

а) $(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 \cdot (\sqrt[3]{b})^3 = ab$. Димәк, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ — кубы ab га тигез булган сан. Ә андый сан булып $\sqrt[3]{ab}$ тора. Димәк, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

б) Шулай ук итеп исбатлыйбыз. ◼

$y = \sqrt[3]{x}$ функциясен тикшереп, аның кайбер үзлекләрен билгеләп үтик һәм графигын төзербез. Гадәти $f(x) = \sqrt[3]{x}$ билгеләнешен кертәбез.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ (биредә сүз функциянең табигый билгеләнү өлкәсе турында бара – к.: 92 б.), чөнки алда билгеләнеп үтелгәнчә, теләсә нинди саннан куб тамыр алырга мөмкин.

2) $y = \sqrt[3]{x}$ — так функция. Бу югарыда исбатланган $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ бердәйлегеннән килеп чыга.

3) $y = \sqrt[3]{x}$ — $[0; +\infty)$ нурында үсә баручы функция.

Чыннан да, $0 \leqslant x_1 < x_2$; булсын; безгә биредә $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$ икәнен исбатларга кирәк. Киресен, $\sqrt[3]{x_1} \geqslant \sqrt[3]{x_2}$ дип фаразлыйбыз. Ул вакытта, санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре буенча, $\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^3 \geqslant \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^3$, ягъни $x_1 \geqslant x_2$, шартта күрсәтелгәннең киресе килеп чыкты. Димәк, безнең фараз дөрес түгел, шунлыктан, $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$.

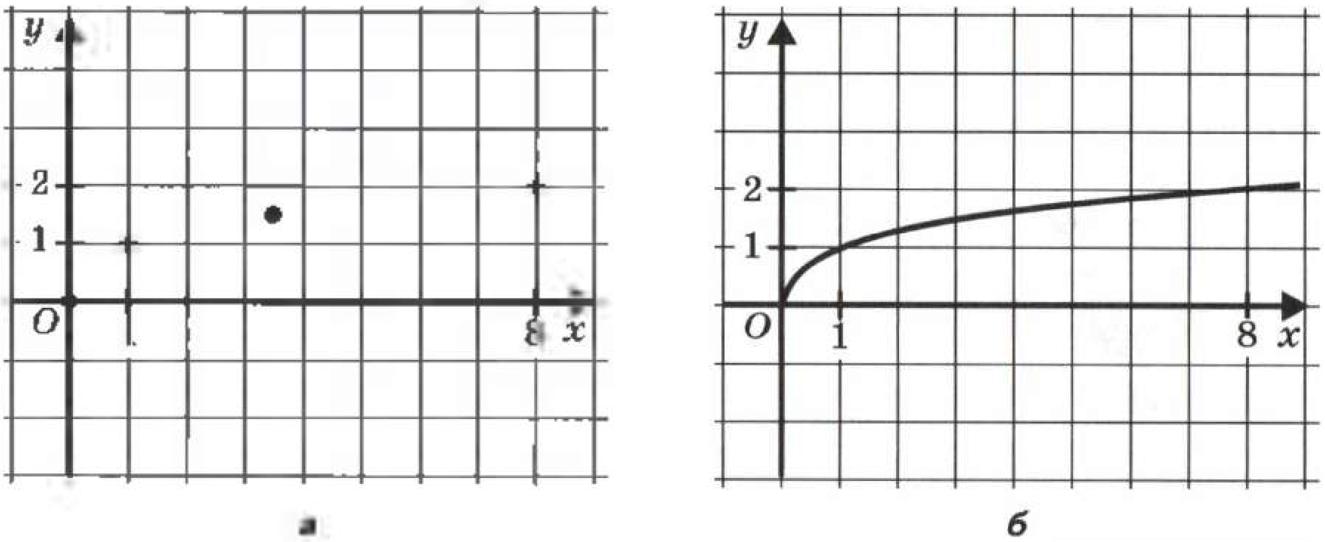
Шулай итеп, $x_1 < x_2$ дән $f(x_1) < f(x_2)$ килеп чыга, ә бу функциянең үсүен күрсәтә.

4) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $[0; +\infty)$ нурында өстән чикләнмәгән. Киресен фаразлыйбыз: теләсә кайсы $x \in [0; +\infty)$ өчен $\sqrt[3]{x} < M$ тигезсезлеге үтәлә торган $M > 0$ саны бар дип уйлыйбыз. $[0; +\infty)$ нурында $x_0 = (M+1)^3$ ноктасын алабыз. Ул чагында $f(x_0) = \sqrt[3]{(M+1)^3} = M + 1 > M$. Шулай итеп, без $f(x_0) > M$ тигезсезлеге үтәлә торган x_0 ноктасын таптык. Ә бу теләсә кайсы $x \geqslant 0$ өчен $f(x) < M$ тигезсезлеге үтәлә дигән фаразга каршы килә. Димәк, безнең фараз дөрес түгел һәм функция өстән чикләнмәгән. Шул ук вакытта, ул астан чикләнгән: $[0; +\infty)$ нурында $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$ тигезсезлеге үтәлә.

5) Алдагы үзлектән турыдан-туры түбәндәге үзлек килеп чыга: $y_{min} = 0$; y_{max} булмый.

$[0; +\infty)$ нурында $y = \sqrt[3]{x}$ функциясенең графигын төзик. Кыйммәтләр таблицасын тутырабыз.

x	0	1	8	$3\frac{3}{8}$
y	0	1	2	1,5



Рәс. 114

Координаталар яссылыгында (0; 0), (1; 1), (8; 2), $\left(3\frac{3}{8}; 1,5\right)$ нокталарын төзибез. (114, *а* рәсем); алар контурлаган сызыкны үткәрәбез (114, *б* рәсем). Функциянең үсүен, әмма өстән чикләнгәнен дә исәпкә алабыз.

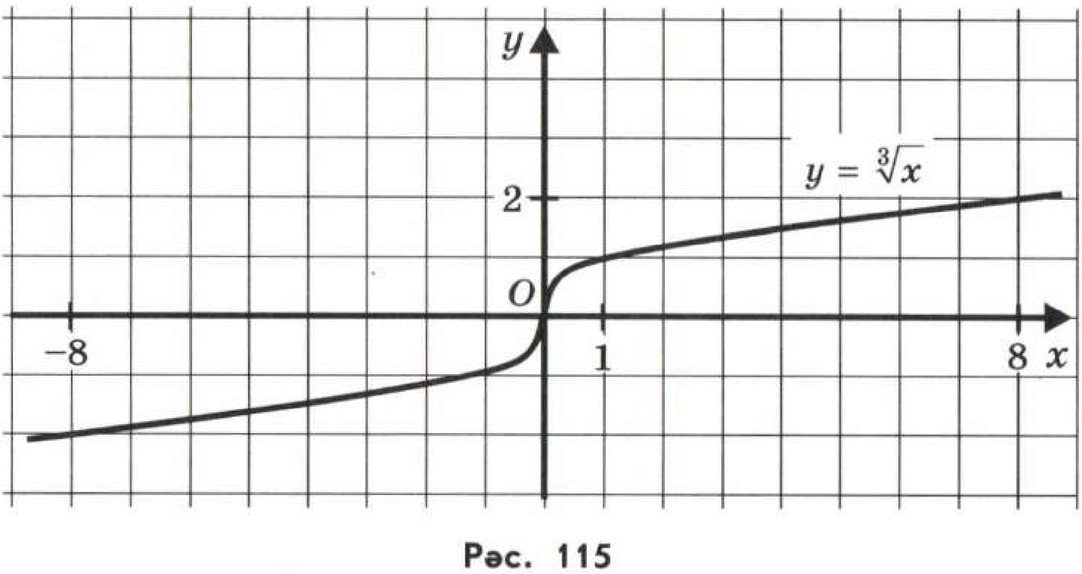
$y = \sqrt[3]{x}$ – так функция булудан файдаланып, 114, *б* рәсемдә төзелгән графикка координаталар башына карата аңа симметрияле тармак өстибез. Шулай итеп, $y = \sqrt[3]{x}$ функциясенең тулы графигын табабыз (115 нче рәсем). Бу функциянең үзлекләрен санап чыгабыз.

$y = \sqrt[3]{x}$ функциясенең үзлекләре

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $y = \sqrt[3]{x}$ – так функция;

3) $y = \sqrt[3]{x}$ функция барлык саннар турысында үсә;



Рәс. 115

4) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе астан да, өстән дә чикләнмәгән;

5) функциянең иң кечкенә кыйммәте дә, иң зур кыйммәте дә юк;

6) функция барлык саннар турысында өзлексез;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

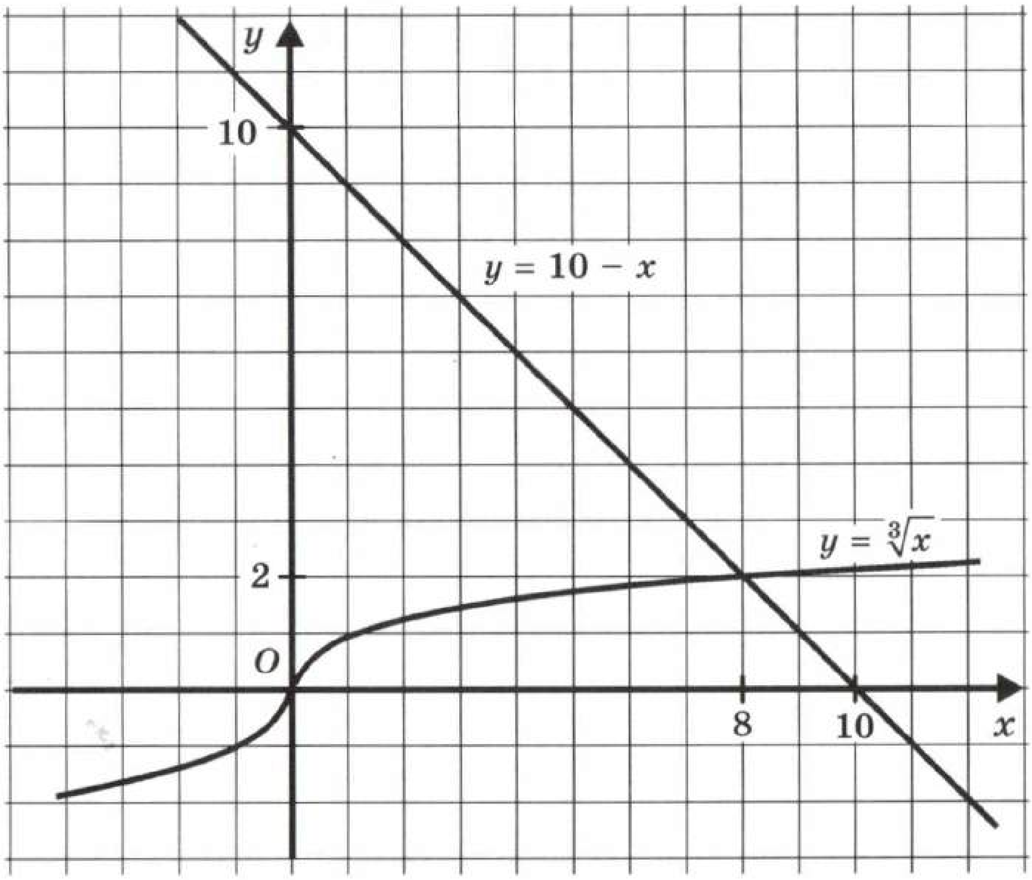
8) функция $(-\infty; 0]$ дә аска таба кабарынкы һәм $[0; +\infty)$тә өскә таба кабарынкы.

Игътибар итегез: $x = 0$ ноктасында график y күчәренә *орына.*

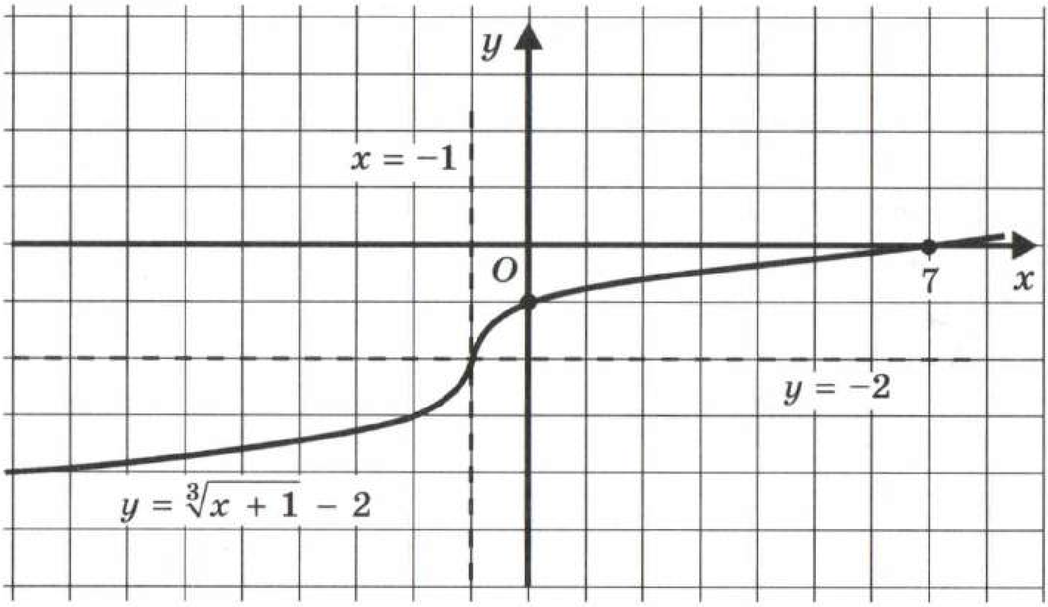
2 нче мисал. $\sqrt[3]{x} = 10 - x$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бер үк координаталар системасында $y = \sqrt[3]{x}$ һәм $y = 10 - x$ функцияләре графикларын төзеп (116 нчы рәсем), аларның (8; 2) ноктасында кисешүенә ышанабыз. $y = \sqrt[3]{x}$ – үсә баручы функция, ә $y = 10 - x$ — кими баручы функция булганлыктан, $x = 8$ — бирелгән тигезләмәнең бердәнбер тамыры була (к.: 120 б.).

Җавап: $x = 8$.



Рәс. 116



Рәс. 117

3 нче мисал. $y = \sqrt[3]{x+1} - 2$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Координаталар башы $(-1;-2)$ ноктасы булган ярдәмче системага күчәбез ($x = -1$, $y = -2$ пунктир турылар, 117 нче рәсем) һәм $y = \sqrt[3]{x}$ функциясен яңа координаталар системасына «бәйлибез». Кирәкле графикны таптык (117 нче рәсем). ◼

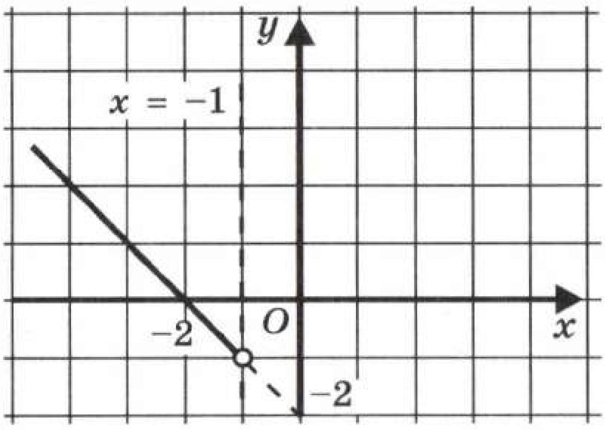
4 нче мисал. Түбәндә бирелгән функциясенең графигын төзергә һәм укырга:

$$y = \begin{cases} -2 - x, \ x < -1 \text{ булганда;} \\ \sqrt[3]{x}, \ x \geqslant -1 \text{ булганда.} \end{cases}$$

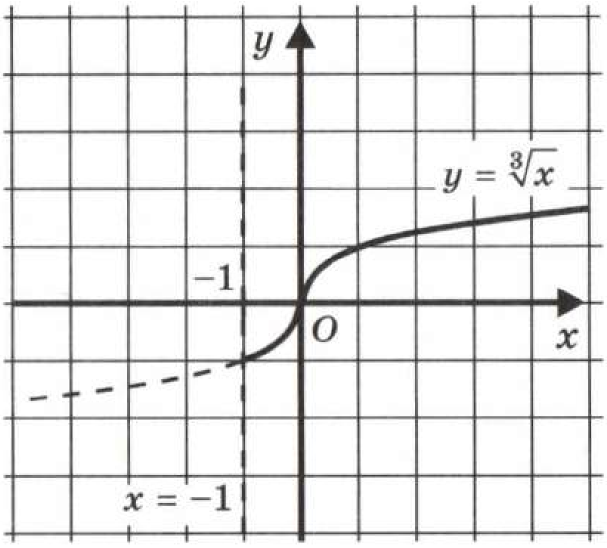
Чишү. $y = -2 - x$ турысын төзибез һәм аның $x < -1$ булгандагы өлешен алабыз (118 нче рәсем). $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе графигын төзибез һәм аның $x \geqslant -1$ булгандагы өлешен алабыз (119 нчы рәсем). Ә хәзер төзелгән бу ике сызыкны бер координата системасында урнаштырабыз (120 нче рәсем) – кирәкле график килеп чыга.

Төзелгән графикны укыйбыз.

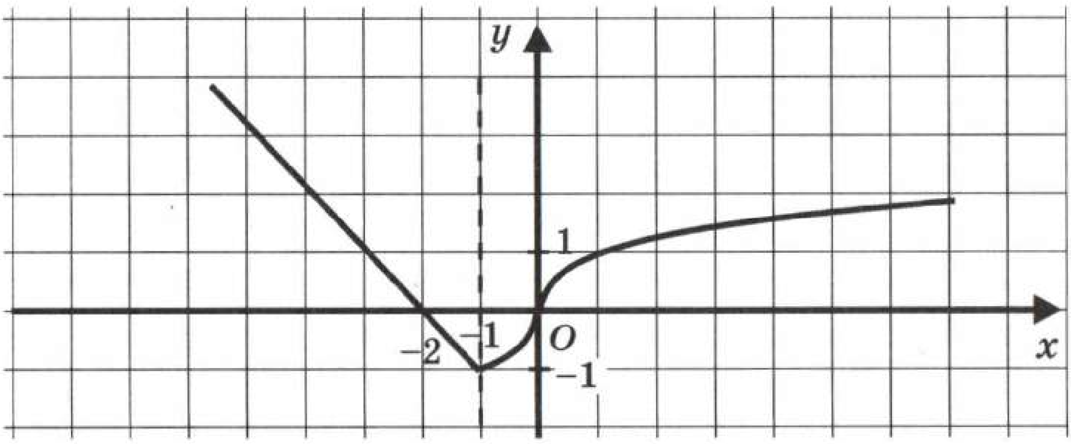
1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция так та, җөп тә түгел.
3. $(-\infty; -1]$ дә кими, $[-1; +\infty)$ тә үсә.
4. Функция астан чикләнгән һәм өстән чикләнмәгән.



Рәс. 118



Рәс. 119



Рәс. 120

5. Функциянең иң зур кыйммәте юк, $y_{min} = -1$.
6. Функция барлык саннар турысында өзлексез.
7. $E(f) = [-1; +\infty)$. ◼

Бу бүлекне тәмамлап, функцияне тикшергәндә, аның графигын төзегәндә, тигезсезлекләрне график юл белән чишкәндә кайвакыт файдалы була торган тагын бер үзлекне искә төшерәбез. Сүз функциянең даими тамгалы аралыклары, ягъни x күчәренең функция даими тамгасын саклый торган аралыклары турында бара. Мәсәлән, графигы 120 нче рәсемдә сурәтләнгән функция өчен даими тамгалы аралыклар: $(-\infty; -2)$ ачык нуры – биредә функция уңай кыйммәтләр ала; $(-2; 0)$ – бу интервалда функция тискәре кыйммәтләр ала; $(0; +\infty)$ – бу ачык нурда функция уңай кыйммәтләр ала.

Искәрмә. Югары сыйныфларда сез квадрат һәм куб тамырлар гына булмавын беләчәксез. Әгәр $a \geqslant 0$ булса, $b^n = a$ нисбәтен

канәгатьләндерә торган b санын a саныннан n-нчы дәрәҗә тамыр дип атыйлар. $b = \sqrt[n]{a}$ дип билгеләнә. Мәсәлән, $\sqrt[5]{32} = 2$, чөнки $2^5 = 32$; $\sqrt[6]{729} = 3$, чөнки $3^6 = 729$. Шулай ук математикларның ни өчен $\sqrt[n]{a}$ язылышы урынына $a^{\frac{1}{n}}$ язылышын ешрак кулланууын белерсез.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нәрсәне a санынан куб тамыр (яки өченче дәрәҗә тамыр) дип атыйлар?

2. Ни өчен $\sqrt[3]{64} = 4$ тигезлеге дөрес, ә $\sqrt[3]{9} = 2$ тигезлеге дөрес түгел икәнен аңлатыгыз.

3. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясенең билгеләнү өлкәсе нинди?

4. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясенең кыйммәтләре өлкәсе нинди?

5. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе үсә баручы; кими баручы; монотон буламы? монотон түгелме?

6. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда кими;

б) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда үсә һәм $x \leqslant 0$ булганда үсә;

в) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда кими һәм $x \leqslant 0$ булганда кими;

г) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x \geqslant 0$ булганда кими һәм $x \leqslant 0$ булганда үсә?

7. Түбәндәге раслауларның кайсы дөрес:

а) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы;

б) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x > 0$ булганда өскә кабарынкы һәм $x < 0$ булганда өскә кабарынкы;

в) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x > 0$ булганда аска кабарынкы һәм $x < 0$ булганда өскә кабарынкы;

г) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе $x > 0$ булганда аска кабарынкы һәм $x < 0$ булганда аска кабарынкы?

8. Графигы $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе графигының бер өлешеннән һәм сызыкча функция графигының нурыннан торган торган кисәкле функция уйлап табыгыз. Аны аналитик һәм график юллар белән бирегез.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

- Бу бүлектә безнең функцияләр, аларның үзлекләре һәм графиклары турында 7 нче һәм 8 нче сыйныф алгебра курсыннан билгеле булган белемнәребезне күпмедер дәрәҗәдә тәртипкә салдык.
- Түбәндәге төшенчәләрнең билгеләмәләрен формалаштырдык:
  функция, функциянең билгеләнү өлкәсе, кыйммәтләре өлкәсе;
  функциянең монотонлыгы (үсүе яки кимүе);
  функциянең астан һәм өстән чикләнгәнлеге;
  функциянең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләре;
  функциянең җөплеге;
  куб тамыр.
- Сез функцияне бирүнең төрле юллары: аналитик, график, таблица, сүзләр ярдәмендә бирелеше белән таныштыгыз.
- Сез яңа математик атамаларны белдегез:
  җөп функция, так функция; дәрәҗәле функция.
- Без яңа тамгаланышлар (математика теленең яңа символларын) керттек: $y = f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсе өчен $D(f)$; $y = f(x)$ функциясенең кыйммәтләре күплеге өчен $E(f)$.
- Сез яңа математик модельләр: $y = x^n$, $y = x^{-n}$, функцияләрен, биредә n — натураль сан, һәм $y = \sqrt[3]{x}$ функциясен өйрәндегез, аларның үзлекләрен һәм графикларын тикшердегез.
- Без түбәндәге графикларның геометрик үзенчәлекләрен ачыкладык:
  үсә баручы функциянең, кими баручы функциянең;
  җөп функциянең, так функциянең;
  астан чикләнгән, өстән чикләнгән функциянең;
  өзлексез функциянең;
  аска таба кабарынкы, өскә таба кабарынкы функциянең.

ТИКШЕРЕНҮ ЭШЛӘРЕ ӨЧЕН ТЕМАЛАР

1 Функцияне бирүнең төрле юллары.
2 Бөтен сан күрсәткечле дәрәҗәле функцияләр.
3 Функцияләрнең үзлекләре.

4 БҮЛЕК
ПРОГРЕССИЯЛӘР

§ 15. *Санлы эзлеклелекләр*
§ 16. *Арифметик прогрессия*
§ 17. *Геометрик прогрессия*

§ 15. САНЛЫ ЭЗЛЕКЛЕЛЕКЛӘР

1. Санлы эзлеклелекнең билгеләмәсе

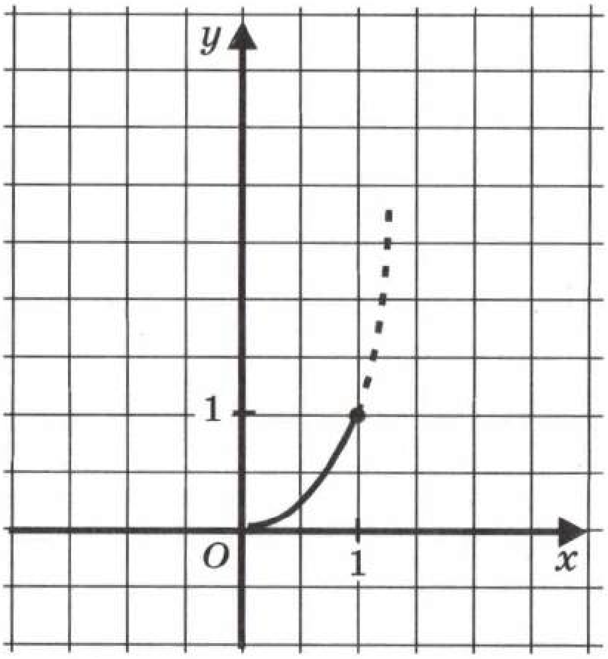
Дүрт функцияне тикшерик:

1) $y = x^2$, $x \in [0; 1]$; 3) $y = x^2$;
2) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$; 4) $y = x^2$, $x \in N$.

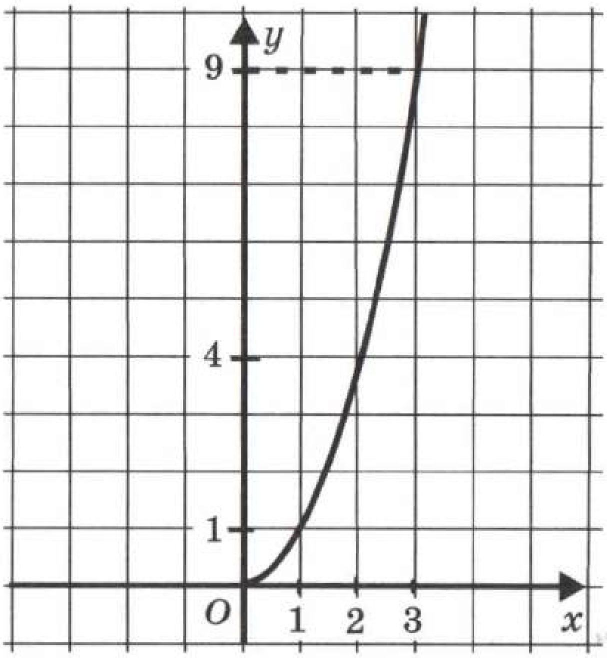
Алар бер үк $y = x^2$ формуласы белән бирелгән, әмма функцияләрнең билгеләнү өлкәләре төрле. Беренче очракта $D(f) = [0; 1]$. Икенчесендә $D(f) = [0; +\infty)$. Өченчесендә функциянең билгеләнү өлкәсе күрсәтелмәгән. Математикада гамәлдә булган килешү нигезендә, бу очракта $D(f)$ функцияне биргән аңлатманың, ягъни x^2 аңлатмасының билгеләнү өлкәсе белән тәңгәл килә: $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Ниһаять, дүртенче очракта функциянең билгеләнү өлкәсе булып натураль саннар күплеге N тора: $D(f) = N$. Бу функцияләрнең графиклары 121–124 нче рәсемнәрдә төрле масштабларда күрсәтелгән.

Үзегез дә күреп торасыз, беренче өч функция – сезнең өчен билгеле функцияләр, ә дүртенчесе үзгәрәк тоеладыр. Мәктәптә алгебра курсын өч ел өйрәнү барышында без төрле функцияләрне тикшердек, тик аларның билгеләнү өлкәләре һәрвакыт нинди дә булса аралык яисә берничә аралыкның берләшмәсе булды, ә функция графигы бер яки берничә тоташ сызык була иде. Ә дүртенче функциянең билгеләнү өлкәсе – натураль саннар күплеге – аерым ноктналардан (математиклар моны аерым изоляцияләнгән ноктлар

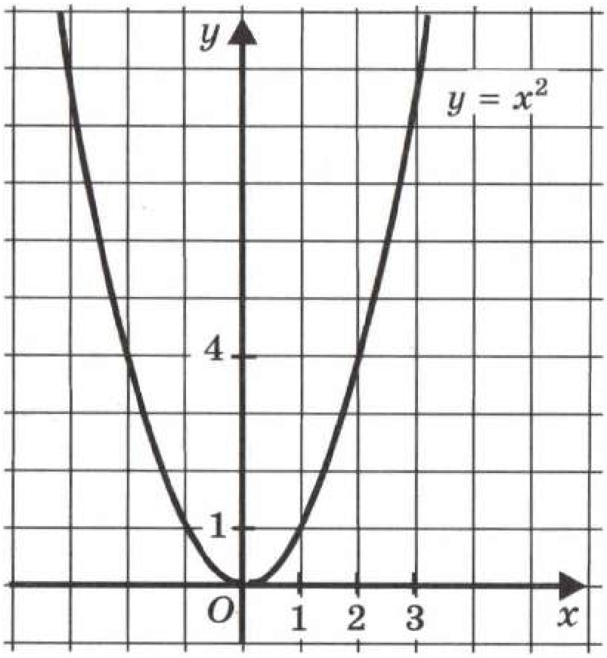
диләр), шулай булгач, функциянең графигы да аерым нокталардан тора. Шундый сорау да туарга мөмкин: ә натураль саннар күплегендә бирелгән функцияләрне өйрәнергә кирәк микән, төгәлрәге, алар реаль тормышта очрый микән?



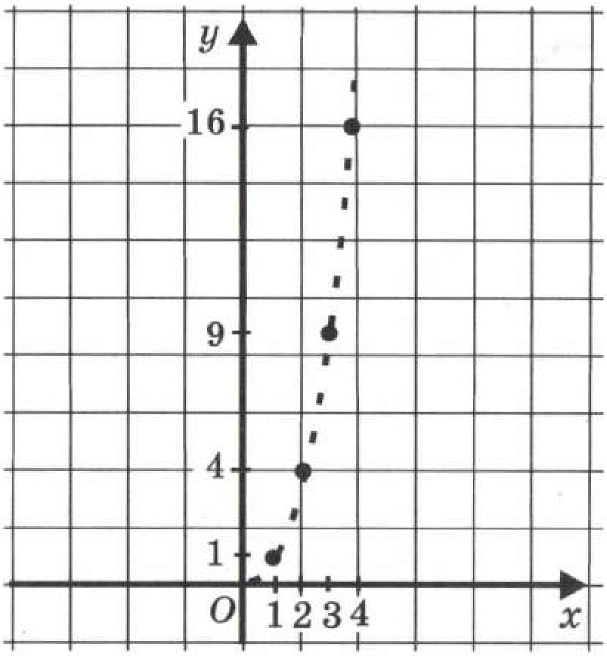
Рәс. 121



Рәс. 122



Рәс. 123



Рәс. 124

«Алгебра–7» дәреслегендә шундый мәсьәлә бар иде: складта 500 т ташкүмер бар һәм һәр көнне бирегә 30 ар тонна күмер китерәләр. Бер көннән, 2 көннән, 3 көннән, 15 көннән һ. б. соң складта күпме күмер булыр? Әгәр көннәр санын x, ә ташкүмер микъдарын (тонналарда) y дип алсак, бу очракның математик моделе – натураль саннар күплеге N да бирелгән сызыкча функция булыр:

$$y = 500 + 30x, \qquad x \in N.$$

Тагын бер мисал. Банк счетына A сум акча салалар, ә банк ай саен p % акча өстәп бара. Бер айдан, 2 айдан, 12 айдан һ. б. соң счетта ничә сум акча булыр? Бу хәлнең математик моделе булып $y = A \cdot 2^{kx}$, $x \in N$, функциясе тора икән, биредә y – кертемнең суммасы (сумнарда), x – счет ачылган мизгелдән башлап узган тулы айлар саны, ә k – банк проценты p белән бәйле (гадәттә якынча $k \approx 0{,}014p$ формуласын кулланалар) уңай коэффициент.

Куелган сорауга җавапны таптык: натураль саннар күплегендә бирелгән функцияләрне ($y = f(x)$, $x \in N$), өйрәнергә кирәк икән.

$y = f(x)$, $x \in N$ язылышы урынына гадәттә $y = f(n)$ язылышын кулланалар, һәм анда аргументның (n) натураль сан ($n \in N$) икәнлеген күздә тотарга килешкәннәр. Каралган мисалларны үзгәртеп язабыз:

$y = x^2$, $x \in N$ урынына $y = n^2$ дип язарга була;

$y = 500 + 30x$, $x \in N$ урынына $y = 500 + 30n$ дип язарга була;

$y = a \cdot 2^{kx}$, $x \in N$ урынына $y = a \cdot 2^{kn}$ дип язарга була.

Әле тагын бер килешү бар, әгәр $y = f(n)$ икән, $f(1)$ урынына y_1, $f(2)$ урынына y_2, $f(3)$ урынына y_3, $f(n)$ урынына y_n һ. б. дип язалар. $y = f(n)$ функциясенең кыйммәтләрен эзлекле рәвештә бер–бер артлы $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$ дип, яки алда килешкәнчә, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... дип язарга мөмкин. Мәсәлән $y = n^2$ функциясе өчен:

$$y_1 = 1^2 = 1;$$
$$y_2 = 2^2 = 4;$$
$$y_3 = 3^2 = 9;$$
$$y_4 = 4^2 = 16 \text{ һ. б.}$$

Табылган кыйммәтләрне *эзлекле* рәвештә бер-бер артлы:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots\ .$$

дип язарга була. Бу язылышта 1 саны – беренче урында, 4 – икенче, 9 – өченче, 16 – дүртенче, ә n^2 – n нчы урында тора.

1 нче билгеләмә. $y = f(x)$, $x \in N$, функциясен **натураль аргумент функциясе** яки **санлы эзлеклелек** дип атыйлар һәм $y = f(n)$ яки $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ дип билгелиләр.

y_1, y_2, y_3 (h. б.) кыйммәтләрне *эзлеклелекнең беренче, икенче, өченче* (h. б.) буыннары дип йөртәләр. Һәм y_n символындагы n санын *индекс* дип атыйлар, ул эзлеклелектәге теге яки бу буынның тәртип номерын күрсәтә. Кайвакыт эзлеклелекне күрсәтү өчен (y_n) язылышын да кулланалар.

Эзлеклелек бирелешендәге күпнокталар ($y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ язылышы күздә тотыла) y_3 тән сулдарак эзлеклелекнең шуннан соңгы буыннары (y_4, y_5, y_6.. h. б.), y_n янәшәсендә сулда y_{n-1}, ә уңда y_{n+1} урнаша дигәнне аңлата. Шулай ук, y_{n-1} буыны алдыннан y_{n-2}, ә y_{n+1} буыныннан соң y_{n+2} h. б. килә.

Эзлеклелекнең буыннарын төрле хәрефләр белән билгеләргә мөмкин: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, яки $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, яки $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Билгеле булганча, функция төрле юллар белән, мәсәлән, аналитик, график юллар белән һәм сүзләр ярдәмендә h. б. бирелергә мөмкин (к. § 9). Эзлеклелекләр дә төрле юллар белән бирелә, шулардан *аналитик, рекуррент юллар* һәм *сүзләр ярдәмендә бирү* – иң әһәмиятлеләре.

2. Эзлеклелекнең аналитик бирелеше

Әгәр эзлеклелекнең n-нчы буынының формуласы $y_n = f(n)$ күрсәтелсә, ул *аналитик* юл белән бирелгән, диләр.

1 нче мисал. $y_n = n^2$. Бу – алдарак тикшерелгән 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ..., эзлеклелегенең аналитик бирелеше.

Бирелә n ның конкрет кыйммәтен күрсәтеп, эзлеклелектәге шул номерлы буынны табу кыен түгел. Мәсәлән, әгәр $n = 9$ булса, $y_9 = 9^2$, ягъни $y_9 = 81$; әгәр $n = 27$ булса, $y_{27} = 27^2$, ягъни $y_{27} = 729$. Киресенчә, эзлеклелекнең билгеле бер буыны бирелсә, аның номерын күрсәтергә була. Мәсәлән, әгәр $y_n = 625$ булса, $n^2 = 625$

тигезләмәсеннән $n = 25$. Димәк, 625 саны бу эзлеклелекнең 25 нче урынында тора.

2 нче мисал $y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Бер-бер артлы табабыз:

$$y_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} = -1;$$

$$y_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$y_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$y_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

....

Шулай итеп, түбәндәге эзлеклелекне таптык:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \ldots .$$

Шушы ук эзлеклелекне кисәкле функция $y = f(n)$ рәвешендә аналитик юл белән бирергә мөмкин иде, биредә

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ — натураль так сан булганда;} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ — натураль җөп сан булганда.} \end{cases}$$

Алдагы мисалдагы кебек, бирелгән номеры буенча эзлеклелекнең буынын табарга мөмкин. Мәсәлән, $y_{37} = -\frac{1}{37}$, ә $y_{48} = \frac{1}{48}$.

3 нче мисал. $y_n = C$. Биредә сүз *стационар* дип йөртелә торган $C, C, C, \ldots,$ эзлеклелеге турында бара.

4 нче мисал. $y_n = 2^n$. Бу – $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$ эзлеклелегенең аналитик бирелеше.

Күргәнегезчә, эзлеклелекнең n нчы буыны формуласын белгәннән соң, аның беренче, икенче, өченче буыннарын һәм, гомумән, номеры күрсәтелгән теләсә кайсы буынын табарга мөмкин. Ә менә кире мәсьәләне чишү – берничә башлангыч буыны

бирелгән эзлеклелекнең n нчы буыны формуласын табу кыенрак. Шундый уйлап табуларга мисаллар китерик. Иң мөһиме – бу закончалыкның тулы эзлеклелеккә хас булуын онытмаска кирәк.

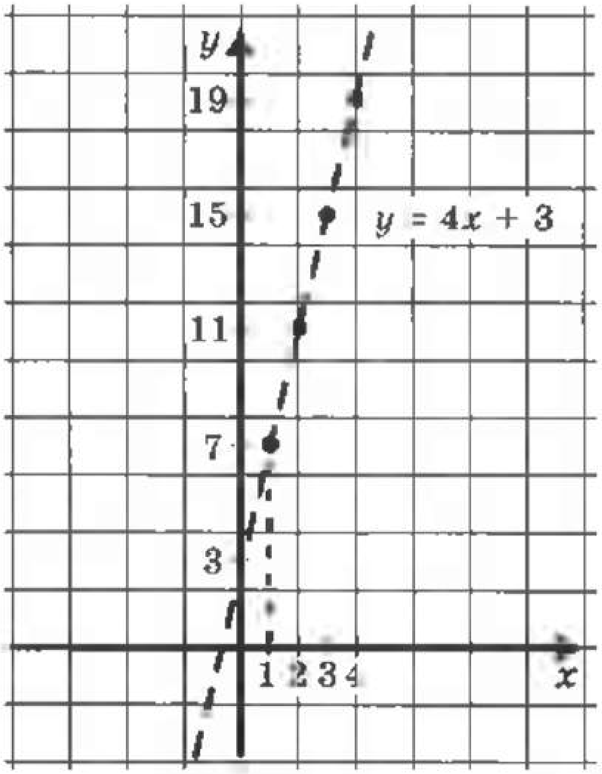
5 нче мисал. 1, 3, 5, 7, 9, ...
Биредә $y_n = 2n - 1$ (так саннар эзлеклелеге).

6 нчы мисал. 2, 4, 6, 8, 10, ...
Биредә $y_n = 2n$ (җөп саннар эзлеклелеге).

7 нче мисал. 4, 8, 12, 16, 20, ...
Биредә $y_n = 4n$.

8 нче мисал. 7, 11, 15, 19, 23, ...
Бу эзлеклелекнең һәр буыны моннан алдагы эзлеклелекнең һәр тиңдәш буыныннан 3 кә зуррак. Димәк, $y_n = 4n + 3$.

125 нче рәсемдә $y_n = 4n + 3$ эзлеклелегенең, ягъни $y = 4x + 3$, $x \in N$ функциясенең графигы сурәтләнгән. Ул $y = 4x + 3$ турысының абсциссалары $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ һ. б. нокталарыннан тора.



Рәс. 125

9 нчы мисал. $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$.

Биредә $y_n = \frac{n+1}{n^2}$ (тикшерегез!).

10 нчы мисал. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Биредә $y_n = 2^{n-1}$.

3. Эзлеклелекнең сүзләр ярдәмендә бирелеше

Эзлеклелекне бирүнең бу ысулын мисалда аңлатып үтәбез.

Белгәнебезчә, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$. Бу иррациональ сан белән төрле эзлеклелекләрне бәйләргә була:

1) $\sqrt{2}$ санының киме белән алынган унарлы якынчалары эзлеклелеге: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, ...;

2) $\sqrt{2}$ санының артыгы белән алынган унарлы якынчаларын: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422, ...;

3) 1,41421 санының унарлы тамгалары эзлеклелеге:

1, 4, 1, 4, 2, 1, ...

Һәр өч очракта эзлеклелекне төзү кагыйдәсе сүзләр белән (формула белән түгел!) сурәтләнгән.

Тагын бер мисал – гади саннар эзлеклелеге:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Эзлеклелекнең сүзләр ярдәмендә сурәтләнеше буенча аның аналитик бирелешен табу еш кына шактый кыен (ә кайвакыт чишелмәслек) мәсьәлә булып тора.

4. Эзлеклелекнең рекуррент бирелеше

Эзлеклелекне бирүнең еш кулланыла торган бу ысулында *эзлеклелекнең n-нчы буынын аның үзеннән алдарак буыннар билгеле булганда исәпләү кагыйдәсе* күрсәтелә. Бу кагыйдә буенча эзлеклелек буыннарын исәпләгәндә, без киредән алгарак кайтабыз, алдагы буыннарның нәрсәгә тигез икәнен ачыклыйбыз шикелле. Эзлеклелекнең мондый бирелешен *рекуррент* (латин телендә *recurrere* – әйләнеп кайту) дип атыйлар. Мондый очракларда ешрак эзлеклелекнең *n*-нчы буынын алдагылары аша исәпли торган

формула һәм бер-ике башлангыч буынны күрсәтәләр. Мисаллар карап үтик:

11 нче мисал. $y_1 = 3$; $n = 2, 3, 4, \ldots$ булганда, $y_n = y_{n-1} + 4$. Башкача әйтсәк, эзлеклелекнең n-нчы буыны үзеннән алдагы $(n - 1)$ нче буынга 4 не кушып табыла.

Табабыз:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = y_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$
$$y_3 = y_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$
$$y_4 = y_3 + 4 = 11 + 4 = 15 \text{ һ. б.}$$

Шулай итеп, эзлеклелек килеп чыкты:

$$3, 7, 11, 15, \ldots .$$

Игътибар итегез, бу эзлеклелекне аналитик юл белән дә бирергә мөмкин: $y_n = 4n - 1$ (тикшерегез!).

12 нче мисал. $y_1 = 3$; $n = 2, 3, 4, \ldots$ булганда, $y_n = 2y_{n-1}$. Башкача әйтсәк, эзлеклелекнең n-нчы буыны үзеннән алда килгән ике буынның суммасына тигез.

Табабыз:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = 2y_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$
$$y_3 = 2y_2 = 2 \cdot 6 = 12;$$
$$y_4 = 2y_3 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ һ. б.}$$

Шулай итеп, эзлеклелек килеп чыкты:

$$3, 6, 12, 24, \ldots .$$

Бу мисалда да эзлеклелекнең аналитик бирелешенә күчү кыен түгел: $y_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (тикшерегез!).

13 нче мисал. $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $n = 3, 4, 5 \ldots$ булганда, $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$. Башкача әйтсәк, эзлеклелекнең n-нчы буыны үзеннән алда килгән ике буынның суммасына тигез.

Табабыз:

$$y_1 = 1;$$
$$y_2 = 1;$$
$$y_3 = y_1 + y_2 = 1 + 1 = 2;$$
$$y_4 = y_2 + y_3 = 1 + 2 = 3;$$
$$y_5 = y_3 + y_4 = 2 + 3 = 5;$$
$$y_6 = y_4 + y_5 = 3 + 5 = 8 \text{ һ. б.}$$

Шулай итеп, эзлеклелек килеп чыкты:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Бу эзлеклелекне математикада махсус өйрәнәләр, чөнки ул күп кенә кызыклы үзлекләргә ия. Аны XIII йөздә яшәгән итальян математигы хөрмәтенә *Фибоначчи эзлеклелеге* дип атыйлар. Фибоначчи эзлеклелеген рекуррент юл белән бирү җиңел, ә аналитик юл белән – бик кыен (ул Бине формуласы белән бирелә:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Рекуррент юл белән бирелгән эзлеклелекләр арасында гади, әмма шул ук вакытта мөһим саналган ике очрак бар.

Беренче очрак. Эзлеклелекнең беренче буыны бирелә: $y_1 = a$, һәм рекуррент нисбәт күрсәтелә: $n = 2, 3, 4, \ldots$ булганда, $y_n = y_{n-1} + d$ (a һәм d – саннар).

Икенче очрак. Эзлеклелекнең беренче буыны бирелә: $y_1 = b$, һәм рекуррент нисбәт күрсәтелә: $n = 2, 3, 4, \ldots$ булганда $y_n = y_{n-1} \cdot q$ (b һәм q — саннар).

Беренче очракта *арифметик прогрессия* (к.: 11 нче мисал, биредә $a = 3$, $d = 4$) бирелгән, диләр. Икенче очракта *геометрик прогрессия* (к.: 12 нче мисал, биредә $b = 3$, $q = 2$) турында сүз бара. Прогрессияләр турында §16та һәм §17 та җентекләбрәк сөйләшербез.

5. Монотон эзлеклелекләр

Санлы эзлеклелек – санлы функциянең аерым очрагы, шунлыктан функцияләрнең кайбер үзлекләре эзлеклелекләргә дә карый. Биредә без монотонлык үзлеге белән генә чикләнербез (калган үзлекләр 10 нчы сыйныф алгебра курсында өйрәнелә).

2 нче билгеләмә. Әгәр эзлеклелекнең (y_n) һәр буыны (беренчесеннән тыш) үзеннән алда килгәненнән зуррак булса:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots,$$

ул **үсә баручы** эзлеклелек дип атала.

3 нче билгеләмә. Әгәр эзлеклелекнең (y_n) һәр буыны (беренчесеннән тыш) үзеннән алда килгәненнән кечерәк булса:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots,$$

ул **кими баручы** эзлеклелек дип атала.

Үсә баручы һәм кими баручы эзлеклелекләрне бер уртак атама белән – **монотон эзлеклелекләр** дип атыйлар.

14 нче мисал. $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$.
Бу үсә баручы эзлеклелек.

15 нче мисал. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.
Бу кими баручы эзлеклелек.

16 нчы мисал. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$.

Бу эзлеклелек үсә баручы да, кими баручы да түгел (монотон булмаган эзлеклелек).

17 нче мисал. $y_n = 2^n$.
Сүз биредә 2, 4, 8, 16, 32, ... эзлеклелеге турында бара. Бу үсә баручы эзлеклелек була.
Гомумән, *әгәр* $a > 1$ *булса,* $y_n = a^n$ *– үсә баручы эзлеклелек була.*

18 нче мисал. $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Сүз $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ эзлеклелеге турында бара. Бу кими баручы эзлеклелек.
Гомумән, *әгәр* $0 < a < 1$ булса, $y_n = a^n$ *– кими баручы эзлеклелек була.*

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нәрсә ул санлы эзлеклелек?
2. Аналитик юл белән бирелгән санлы эзлеклелеккә өч мисал китерегез.
3. (y_n): 1, 5, 9, 13, 17, ... санлы эзлеклелеге бирелгән. Бу эзлеклелектә алтынчы урында нинди сан тора? Җиденче урында нинди сан? Эзлеклелекнең n нчы буыны формуласын төзегез.
4. Сүзләр ярдәмендә бирелгән эзлеклелеккә мисал китерегез.
5. Рекуррент юл белән бирелгән эзлеклелеккә мисал китерегез.
6. Нинди эзлеклелекне а) үсә баручы; б) кими баручы дип атыйлар?
7. а) Үсә баручы эзлеклелеккә; б) кими баручы эзлеклелеккә; в) монотон булмаган эзлеклелеккә мисал китерегез.

§ 16. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯ

1. Төп төшенчәләр

Билгеләмә. Санлы эзлеклелекнең икенче буыннан башлап һәр буыны үзеннән алда килгән буын белән бер үк d саны суммасына тигез булса, бу эзлеклелекне **арифметик прогрессия** дип атыйлар. Әлеге d санын прогрессиянең **аермасы** дип йөртәләр.

Шулай итеп, арифметик прогрессия – ул рекуррент нисбәтләр:

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

(a һәм d – бирелгән саннар) белән бирелгән санлы эзлеклелек (a_n).

Санлы эзлеклелеккә карап, аның арифметик прогрессия түгел икәнен белеп буламы? Әйе, була. Әгәр эзлеклелектәге теләсә кайсы буын белән аннан алда килүче буын арасындагы аерма даими сан икән (ягъни, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$), сезнең алда – арифметик прогрессия дигән сүз. Билгеле, бу закончалык эзлеклелекнең барлык буыннары өчен дә дөрес дип кабул ителә.

1 нче мисал. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
Бу – арифметик прогрессия, монда $a_1 = 1$, $d = 2$.

2 нче мисал. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 1, 4, ...
Бу – арифметик прогрессия, монда $a_1 = 20$, $d = -3$.

3 нче мисал. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ...
Бу – арифметик прогрессия, монда $a_1 = 8$, $d = 0$.

Әгәр $d > 0$ булса (к.: 1 нче мисал), *арифметик прогрессия – үсә баручы, ә $d < 0$ булса, кими баручы* (к.: 2 нче мисал) *була.*

Эзлеклелекнең (a_n) арифметик прогрессия икәнлеген билгеләү өчен, кайвакыт түбәндәге язылыш уңайлы:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Биредә «$\div$» тамгасы «арифметик прогрессия» сүзләрен алыштыра.

Әгәр арифметик прогрессиядә эзлеклелекнең нинди дә булса конкрет буыннан, мәсәлән a_n нан соң килүче барлык буыннарны алып ташласак, *чикле арифметик прогрессия* килеп чыга:

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Кайвакыт чикле арифметик прогрессиядә баштагы берничә буынны гына түгел, ахырда килүче берничә буынны да язу уңай була:

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Алдагы пунктларда арифметик прогрессиянең иң мөһим үзлекләрен карап үтәрбез.

2. Арифметик прогрессиянең n-нчы буыны формуласы

Арифметик прогрессиянең билгеләмәсен искә төшерсәк, аның анда рекуррент юл белән бирелешен күрәбез. Күпчелек очракларда мондый бирелеш уңайсызрак: мәсәлән, a_{100} не исәпләү өчен, эзлеклелекнең баштагы 99 буынын табарга кирәк. Әгәр n-нчы буын формуласын табарга, ягъни арифметик прогрессиянең аналитик бирелешенә күчәргә мөмкин булса, бу исәпләүләр күпкә җиңеләя.

Аермасы d-га тигез булган $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ арифметик прогрессиясен карыйбыз. Биредә:

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \text{ һ. б.}$$

Теләсә кайсы N номеры өчен түбәндәге тигезләмәнең дөрес булуын күрәбез:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \qquad (1)$$

Бу – арифметик прогрессиянең n-нчы буыны формуласы.

Мөһим искәрмә. «Күрәбез», «ышанырга була» һ. б. – интуиция, ачыш мизгеле, уйпап чыгару өлкәсеннән стилистик элементлар яки сүзтезмәләр. Математикада да алардан файдаланалар, әмма нин-

дидер фактларны ачкан вакытта гына, аларны нигезләү өчен түгел. (1) формуланы без «сиземләдек», әмма нигезләмәдек. Кызыксынучылар өчен исбатлауны бирәбез.

Әгәр $n = 1$ булса, $a_1 = a_1 + (1 - 1)d$ — дөрес тигезлек, ягъни (1) формула $n = 1$ өчен дөрес.

Шулай ук бу формуланы натураль $n = k$ саны өчен дә дөрес дип, ягъни $a_k = a_1 + (k - 1)d$ тигезлеге үтәлә дип фаразлыйк. Ул чагында (1) формуланың чираттагы сан: $n = k + 1$ натураль саны өчен дә дөреслеген, ягъни $a_{k+1} = a_1 + kd$ икәнен исбатлыйк.

Чынлап та, арифметик прогрессиянең билгеләмәсе буенча $a_{k+1} = a_k + d$. Моннан:

$$a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k - 1)d) + d = a_1 + kd.$$

Ә хәзер карагыз: $n = 1$ өчен (1) формула дөрес (тикшердек). Аннан соң, (1) формула $n = k$ өчен дөрес булса, $n = k + 1$ өчен дә дөрес икәнен исбатладык. Моннан файдаланабыз: (1) формула $n = 1$ өчен дөрес икән, димәк, ул $n = 2$ өчен дә дөрес; ә инде $n = 2$ өчен дөрес икән, $n = 3$ өчен дә дөрес һ. б. Димәк, (1) формула теләсә нинди натураль n саны өчен дә дөрес була.

Әлегечә фикер йөртү юлын *«математик индукция ысулы»* дип атыйлар.

Арифметик прогрессиянең n-нчы буын формуласын: $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ны $a_n = dn + (a_1 - d)$ рәвешендә язып, $a_n = y$, $a_1 - d = m$ дип билгелик. Нәтиҗәдә $y = dn + m$, яки

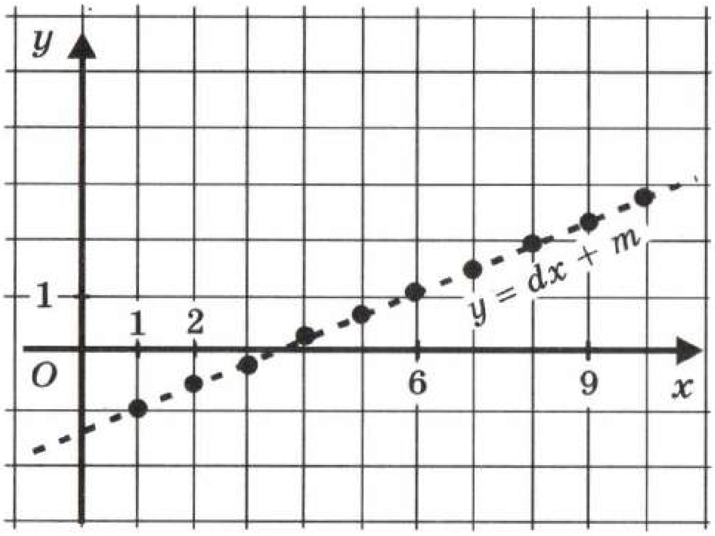
$$y = dx + m,\ x \in N.$$

функциясен табабыз. Димәк, арифметик прогрессияне *натураль N саннар күплегендә бирелгән сызыкча функция* $y = dx + m$ дип карарга мөмкин икән. Бу сызыкча функциянең почмакча коэффициенты d-га – арифметик прогрессиянең аермасына тигез. 126 нчы рәсемдә арифметик прогрессиянең графигы – турыда абсциссалары $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ һ. б. булган аерым нокталар схематик сурәтләнгән ($d > 0$ очрагы өчен).

1 нче һәм 2 нче мисалларга әйләнеп кайтыйк.

1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Бу – $a_1 = 1$, $d = 2$ булган арифметик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2;$$
$$a_n = 2n - 1.$$



Рәс. 126

(Билгеле, бирелгән так саннар эзлеклелегенә 1, 3, 5, 7, ... карау белән, бу формуланы уйлап табарга мөмкин иде.)

2) 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, ... Бу – $a_1 = 20$, $d = -3$ булган арифметик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-3);$$
$$a_n = 23 - 3n.$$

4 нче мисал. Арифметик прогрессия бирелгән:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

а) $a_1 = 5$, $d = 4$ икәне билгеле, a_{23} не табарга.
б) $a_1 = -2$, $d = 3$ икәне билгеле, n-не табарга.
в) $d = -2$, $a_{39} = 83$ икәне билгеле, a_1 не табарга.
г) $a_1 = 7$, $a_{15} = -35$ икәне билгеле, d не табарга.

Чишү: Барлык очракларда да арифметик прогрессиянең n-нчы буын формуласына нигезләнеп чишәбез:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

а) $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$

б) $a_n = a_1 + (n - 1)d;$

$118 = -2 + (n - 1) \cdot 3;$

$118 = 3n - 5;$

$n = 41.$

в) $a_{39} = a_1 + 38d$;

$83 = a_1 + 38 \cdot (-2)$;

$a_1 = 159$.

г) $a_{15} = a_1 + 14d$;

$-35 = 7 + 14d$;

$14d = -42$;

$d = -3$.

Җавап: а) $a_{22} = 89$; б) $n = 41$; в) $a_1 = 159$; г) $d = -3$

5 нче мисал. Арифметик прогрессиянең тугызынчы буынын икенче буынына бүлгәндә, өлеш 7 гә тигез; прогрессиянең унынчы буынын аның бишенче буынына бүлгәндә, өлеш 2 гә һәм калдык 5 кә тигез. Прогрессиянең егерменче буынын табарга.

Чишү: Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Мәсьәләнең шартын болай язарга мөмкин:

1) ÷ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$;

2) $a_9 = 7a_2$;

3) $a_{10} = 2a_5 + 5$.

Арифметик прогрессиянең n-нчы буын формуласын (берничә тапкыр) кулланып табабыз:

$$a_9 = a_1 + 8d,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_{10} = a_1 + 9d,$$
$$a_5 = a_1 + 4d.$$

Ул чагында мәсьәләнең икенче шартын ($a_9 = 7a_2$) болай язабыз:

$$a_1 + 8d = 7(a_1 + d),$$

ягъни

$$d = 6a_1.$$

Мәсьәләнең өченче шартын ($a_{10} = 2a_5 + 5$) болай язабыз:

$$a_1 + 9d = 2(a_1 + 4d) + 5,$$

ягъни

$$d = a_1 + 5.$$

Нәтиҗәдә ике (a_1 һәм d) үзгәрешлесе белән ике сызыкча тигезләмәнең гади системасын табабыз:

$$\begin{cases} d = 6a_1, \\ d = a_1 + 5. \end{cases}$$

Бу система алда язылган 1) шарт белән берлектә мәсьәләнең математик моделен тәшкил итә.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*
Системаны чишеп, $a_1 = 1$, $d = 6$ икәнен табабыз.

Хәзер арифметик прогрессияне язарга мөмкин:

$$1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ \ldots\ .$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Биредә a_{20} не исәпләргә кирәк. Табабыз: $a_{20} = a_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 6 = 115.$

Җавап: $a_{20} = 115$.

Искәрмә. Карап үтелгән мисалда сүз конкрет математик модель – арифметик прогрессия турында барды. Беренче этапны без гадәттәгечә «математик модель төзү» дип атадык. Димәк, без математик модель өчен математик модель төзедек. Моны ничек аңларга? Эш шунда, мәсьәләләр чишү вакытында еш кына бер математик модельне икенчесе – гадирәге белән алыштырырга туры килә. Әлеге мәсьәләдә дә шулай булды: 1), 2) һәм 3) шартлары белән бирелгән математик модельне гадирәк модель – тигезләмәләр системасы белән алыштырдык.

3. Чикле арифметик прогрессиянең буыннар суммасы формуласы

Чикле арифметик прогрессия бирелгән булсын:

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Аның буыннары суммасын S_n дип билгелибез:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

S_n-ны табуның конкрет мисалын тикшерәбез. Чикле 1, 2, 3, ... 98, 99, 100 арифметик прогрессиясе бирелгән. Аның буыннары суммасын болай исәплибез:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 =$$
$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{50 \text{ кушылучы}} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Ирекле алынган чикле арифметик прогрессия буыннары суммасын исәпләү өчен дә шушы ук фикерне кулланабыз. Башта

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

икәнен искәртәбез. Чыннан да, арифметик прогрессиянең билгеләмәсе буенча $a_2 = a_1 + d$, $a_{n-1} = a_n - d$. Димәк,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Шундый ук юл белән

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

икәнлеген һәм, гомумән, *чикле арифметик прогрессия башыннан k-нчы урында торучы буыны белән ахырыннан k-нчы урында торучы буынның суммасы прогрессиянең беренче һәм ахыргы буыннар суммасына тигез икәнне билгеләп була:* $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Хәзер S_n ны исәплибез:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Бу ике тигезлекне кушып табабыз:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Тигезлекнең уң ягында n пар кушылучы, һәм һәр пар, алда билгеләп үтелгәнчә, $a_1 + a_n$ тигез. Димәк,

$$2S_n = n(a_1 + a_n);$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.}$$

Бу – арифметик прогрессиянең беренче n буыны суммасын табу формуласы.

6 нчы мисал. Чикле арифметик прогрессия бирелгән:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

а) $a_1 = 5$, $d = 4$, $n = 22$ икәне билгеле, S_n ны, ягъни S_{22} не табарга.
б) $a_1 = 7$, $n = 8$, $S_8 = 140$ икәне билгеле, d ны табарга.

Чишү: а) $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$

Димәк, $S_{22} = \dfrac{22(a_1 + a_{22})}{2} = 11 \cdot (5 + 89) = 1034.$

б) Башта a_8 не табабыз:

$$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2};$$
$$140 = 4(a_1 + a_8);$$
$$140 = 4(7 + a_8);$$
$$35 = 7 + a_8;$$
$$a_8 = 28.$$

Ә хәзер арифметик прогрессиянең n нчы буыны формуласын кулланабыз:

$$a_8 = a_1 + 7d;$$
$$28 = 7 + 7d;$$
$$d = 3.$$

Җавап: а) $S_{22} = 1034$; б) $d = 3$.

7 нче мисал. Барлык өчурынлы җөп саннар суммасын табарга.

Чишү: Сүз бирелә 100, 102, 104, ... 998 чикле арифметик прогрессиясе суммасы турында бара. Бу прогрессиядә $a_1 = 100$, $a_n = 998$, $d = 2$. S_n-ны исәпләргә кирәк, тик моның өчен башта n-ны белергә, ягъни күрсәтелгән чикле арифметик прогрессиянең буыннар санын табарга кирәк.

Эзлекле рәвештә табабыз:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$998 = 100 + (n - 1) \cdot 2;$$
$$998 = 2n + 98;$$
$$n = 450.$$

Шулай итеп, $a_1 = 100$, $n = 450$, $a_n = 998$. Безнең максат – S_n ны, ягъни S_{450} не исәпләү. Исәплибез:

$$S_{450} = \frac{450(a_1 + a_{450})}{2} = 225 \cdot (100 + 998) = 247\,050.$$ ◼

Кайвакыт арифметик прогрессиянең n буыны суммасының бераз үзгәртелгән формуласын куллану файдалырак була.

Әгәр S_n өчен формулада $a_n = a_1 + d(n - 1)$ дип алсак, табабыз:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Бу формуланың өстенлеге шунда, S_nны a_1 һәм d аша гына, a_n-ны исәпләп тормыйча табарга мөмкин.

8 нче мисал. Турист, үтә катлаулы маршрут буенча барып, юлының беренче сәгатендә 800 м ара үтә һәм шуннан соңгы һәр сәгать саен алдагысыннан 25 га кимрәк араны үтә башлый. Ул 5700 м араны үтү өчен күпме вакыт сарыф иткән?

Чишү. Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Беренче сәгатьтә турист 800 м, икенчесендә – 775 м, өченчесендә 750 м һ. б. юл үтеп барган. Математик модель булып

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

чикле арифметик прогрессиясе тора, биредә $a_1 = 800$, $d = -25$, $S_n = 5700$. Биредә n-ны, туристның хәрәкәт итү вакытын (сәг) табарга кирәк.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

S_n ның икенче формуласын кулланабыз:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$5700 = \frac{2 \cdot 800 - 25(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$228 = \frac{64 - (n-1)}{2} \cdot n$$

(тигезләмәнең ике өлешен дә 25 кә бүлдек);

$$456 = n(65 - n);$$
$$n^2 - 65n + 456 = 0;$$
$$n_1 = 8,\ n_2 = 57.$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Туристның ничә сәгать юлда булуы сорала. Мәсьәләнең эчтәлегенә туры китереп, ике кыйммәтнең беренчесен сайлыйбыз: $n = 8$. Тикшерәбез: $800 + 775 + 750 + 725 + 700 + 675 + 650 + 625 = 5700$.

Җавап: Турист юлда 8 сәгать булган.

4. Арифметик прогрессиянең характерлы үзлеге

Арифметик прогрессия a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... бирелгән булсын, ди. Аның бер-бер артлы килүче өч буынын: a_{n-1}, a_n, a_{n+1} не карыйбыз. Биредә

$$a_n - d = a_{n-1},$$
$$a_n + d = a_{n+1}$$

икәне билгеле. Бу тигезлекләрне кушып табабыз:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Димәк, арифметик прогрессиянең беренчесеннән (чикле прогрессия булганда соңгысыннан да) тыш һәр буыны үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннарның арифметик уртасына тигез була.

Киресе дә дөрес: әгәр эзлеклелекнең (a_n) теләсә кайсы $n > 1$ буыны өчен түбәндәге тигезлек үтәлсә:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

(a_n) – арифметик прогрессия.

Чынлап та, соңгы тигезлекне болай үзгәртергә мөмкин:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Яки, аерым алганда, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ һ. б. Башкача әйтсәк, эзлеклелекнең һәр буыны белән аннан алда килүче буынның аермасы бер үк сан булып бара, ягъни арифметик прогрессия бирелгән дигән сүз.

Шулай итеп, без түбәндәге теореманы исбатладык:

Теорема

Санлы эзлеклелек, әгәр аның һәр буыны, беренчесеннән (һәм чикле эзлеклелек булганда – соңгысыннан да) тыш, үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннарның арифметик уртасына тигез булса, һәм бары шул вакытта гына арифметик прогрессия була *(арифметик прогрессиянең характерлы үзлеге).*

9 нчы мисал. x-ның нинди кыйммәтләрендә $3x + 2$, $5x - 4$ һәм $11x + 12$ саннары чикле арифметик прогрессия төзи ала?

Чишү. Характерлы үзлек буенча бирелгән аңлатмалар түбәндәге нисбәтне канәгатьләндерергә тиеш:

$$5x - 4 = \frac{(3x + 2) + (11x + 12)}{2}.$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$10x - 8 = 14x + 14;$$
$$x = -5,5.$$

x-ның шушы кыйммәтендә $3x + 2$, $5x - 4$, $11x + 12$ аңлатмалары тиңдәшле рәвештә $-14,5$, $-31,5$, $-48,5$ кыйммәтләрен ала. Бу – арифметик прогрессия, аның аермасы -17 гә тигез.

Җавап: $x = -5,5$.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нинди эзлеклелекне арифметик прогрессия дип атыйлар?
2. 1, 5, 9, 13, 17, ... эзлеклелеге арифметик прогрессия буламы? Әгәр булса, аның аермасы нәрсәгә тигез?
3. Аермасы а) уңай; б) тискәре; в) нуль булган арифметик прогрессиягә мисал китерегез.
4. Арифметик прогрессиянең (a_n) n нчы буыны формуласын языгыз.
5. 2, 5, 8, 11, ... эзлеклелеге арифметик прогрессия буламы? Әгәр булса, аның 17 нче буынын; 41 нче буынын табыгыз.
6. Арифметик прогрессиянең (a_n) беренче n буыны суммасы формуласын языгыз.

7. 3, 1, −1, −3, ... эзлеклелеге арифметик прогрессия буламы? Әгәр булса, беренче егерме буыны суммасын табыгыз.

8. Арифметик прогрессиянең характерлы үзлеге нидән гыйбарәт?

9. Арифметик прогрессия (a_n) бирелгән. Биредә $a_{35} = 43$, $a_{37} = 49$. a_{36} ны табыгыз.

§ 17. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

Уңайлылык өчен, бу параграф та алдагысының планы буенча төзелде.

1. Төп төшенчәләр

Билгеләмә. Барлык буыннары да нульгә тигез булмаган һәм, икенчесеннән башлап, һәр буыны үзеннән алда килүче буынны бер үк q санына тапкырлап табылган санлы эзлеклелекне **геометрик прогрессия** дип атыйлар. Һәм бу очракта q ны прогрессиянең ваклаучысы дип атыйлар.

Шулай итеп, геометрик прогрессия – рекуррент нисбәтләр:

$$b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1} \cdot q \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

(b һәм q – бирелгән саннар, $b \neq 0$, $q \neq 0$)) белән бирелгән санлы эзлеклелек (b_n).

Санлы эзлеклелеккә карап, аның геометрик прогрессия буламы-юкмы икәнен билгеләп буламы? Әйе, була. Әгәр сез эзлеклелекнең теләсә кайсы буыны белән аннан алда килүче буынның чагыштырмасы даими икәненә (ягъни $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = b_4 : b_3 = \ldots$) ышансагыз, сезнең алдыгызда – геометрик прогрессия.

1 нче мисал. 1, 3, 9, 27, 81, ...
Бу геометрик прогрессия, биредә $b_1 = 1$, $q = 3$.

2 нче мисал. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$.
Бу геометрик прогрессия, биредә $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$.

3 нче мисал. $5, 1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \dots$.

Бу геометрик прогрессия, биредә $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$.

4 нче мисал. $8, 8, 8, 8, 8, 8, \dots$.

Бу геометрик прогрессия, биредә $b_1 = 8$, $q = 1$.

Әлеге эзлеклелекнең арифметик прогрессия дә булуын искәртәбез (кара §16 тан 3 нче мисал).

5 нче мисал. $2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$.

Бу геометрик прогрессия, биредә $b_1 = 2$, $q = -1$.

Әгәр $b_1 > 0$, $q > 1$ булса, *геометрик прогрессия үсә баручы* дип (1 нче мисал), әгәр $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ булса, *кими баручы* (2 нче мисал) дип атала.

Эзлеклелекнең (b_n) геометрик прогрессия икәнен билгеләү өчен кайвакыт түбәндәге язылыш уңайлы:

$$\div\div\, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots .$$

Биредә «$\div\div$» тамгасы «геометрик прогрессия» сүзләрен аңлата. Геометрик прогрессиянең бер кызыклы үзлеген билгеләп үтик.

Әгәр эзлеклелек

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

геометрик прогрессия икән, аларның квадратлары эзлеклелеге дә, ягъни

$$b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots,$$

да геометрик прогрессия була.

Икенче геометрик прогрессиянең беренче буыны b_1^2 ка, ә ваклаучысы q^2 ка тигез була.

Әгәр геометрик прогрессиядә b_n нан соңгы барлык буыннарны алып ташласак, *чикле геометрик прогрессия* килеп чыга:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

Алдагы пунктларда геометрик прогрессиянең иң мөһим үзлекләрен карап үтәрбез.

2. Геометрик прогрессиянең n-нчы буыны формуласы

Ваклаучысы q га тигез булган b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... геометрик прогрессиясен карыйбыз. Биредә:

$$b_1 = b_1,$$
$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3,$$
$$b_5 = b_4 q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4 \text{ h. б.}$$

Теләсә кайсы n номеры өчен түбәндәге тигезлекнең дөрес булуын күрәбез:

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \qquad (1)$$

Бу – геометрик прогрессиянең n-нчы буыны формуласы.

Искәрмә. Әгәр сез узган параграфтагы мөһим искәрмәне укып чыгып, аңлаган булсагыз, (1) формуланы математик индукция ысулы белән исбатларга тырышыгыз.

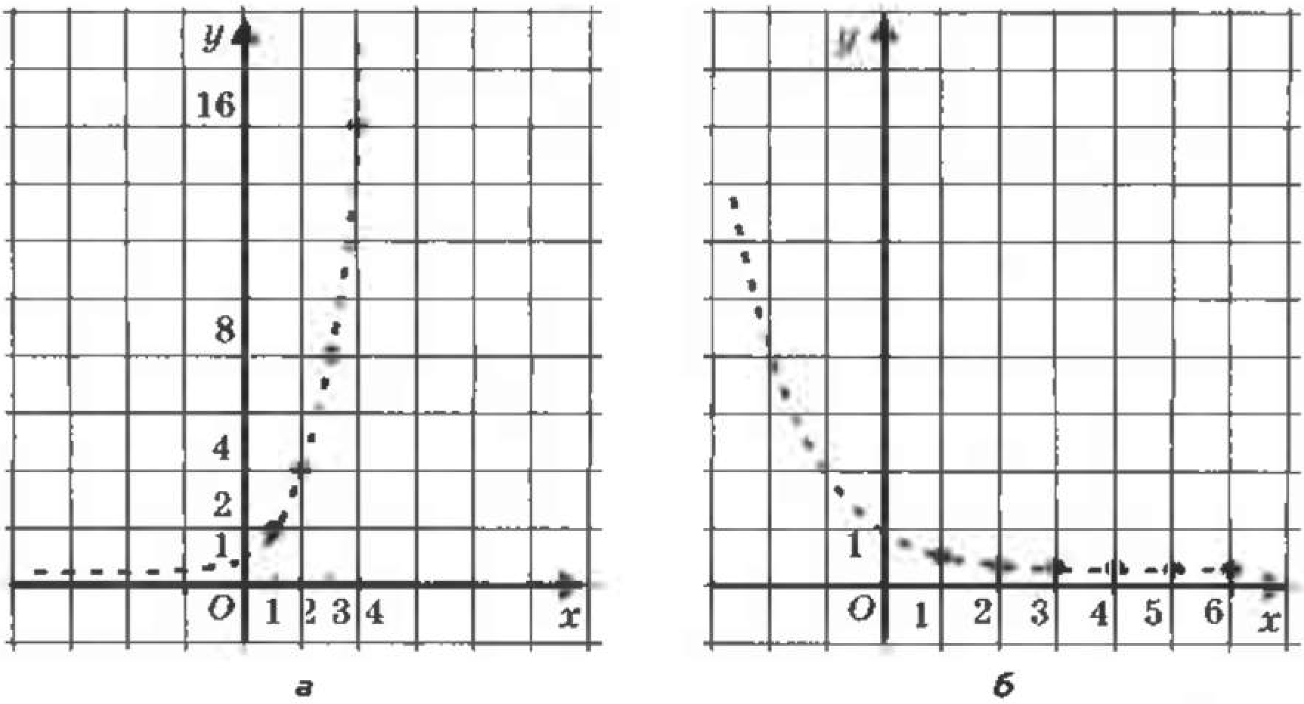
Геометрик прогрессиянең n-нчы буын формуласы $b_n = b_1 q^{n-1}$ не

$$b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$$

рәвешендә язып, $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$ дип билгелик. Нәтиҗәдә $y = mq^n$, яки

$y = mq^x$, $x \in N$ функциясен табабыз.

Биредә x аргументы дәрәҗәнең күрсәткечендә бирелгән, мондый функцияләр *күрсәткечле* дип атала. Димәк, геометрик прогрессияне натураль N саннары күплегендә бирелгән *күрсәткечле функция* дип карарга мөмкин. 127, *А* нче рәсемдә $y = 2^x$, $x \in N$ функциясенең графигы, ә 127, *б* нче рәсемдә $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$ функциясенең графигы сурәтләнгән. Ике очракта да ниндидер кәкредә урнашкан аерым нокталар (абсциссалары $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ h. б.) табабыз (ике нче рәсемдә дә бер үк кәкре, тик ул төрлечә урнашкан һәм төрле масштабларда сурәтләнгән). Мондый кәкрене



Рәс. 127

экспонента дип йөртәләр (бу атама безгә § 9 ахырында очраган иде). Күрсәткечле функция турында сез 11 сыйныфта өйрәнерсез.

Алдагы пунктның 1–5 нче мисалларына әйләнеп кайтыйк.

1) 1, 3, 9, 27, 81, ... Бу – $b_1 = 1$, $q = 3$ булган геометрик прогрессия. n-нчы буын формуласын төзибез:

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1}, \text{ ягъни } b_n = 3^{n-1}.$$

2) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$. Бу – $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$ булган геометрик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3) $5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \ldots$. Бу $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$ булган геометрик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

4) 8, 8, 8, 8, 8, 8, ... Бу – $b_1 = 8$, $q = 1$ булган геометрик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$b_n = 8 \cdot 1^{n-1}, \quad \text{ягъни } b_n = 8$$

(ачыктан-ачык билгеле иде).

5) 2, –2, 2, –2, 2, –2, ... Бу – $b_1 = 2$, $q = -1$ булган геометрик прогрессия, n-нчы буын формуласын төзибез:

$$b_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}.$$

6 нчы мисал. Геометрик прогрессия бирелгән:

$$b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$$

а) $b_1 = \frac{2}{3}$, $q = -3$ икәне билгеле, b_6 -ны табарга.

б) $b_1 = 3$, $q = 2$, $b_n = 1536$ икәне билгеле, n-ны табарга.

в) $q = -2$, $b_7 = -512$ икәне билгеле, b_1-ны табарга.

г) $b_1 = 14$, $b_7 = \frac{7}{32}$ икәне билгеле, q-ны табарга.

Чишү. Барлык очракларда да геометрик прогрессиянең n нчы буын формуласына нигезләнеп чишәбез:

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

а) $b_6 = b_1q^5 = \frac{2}{3} \cdot (-3)^5 = -162.$

б) $b_n = b_1q^{n-1}$;

$1536 = 3 \cdot 2^{n-1}$;

$512 = 2^{n-1}$.

$512 = 2^9$ булганлыктан, $n - 1 = 9$; $n = 10$.

в) $b_7 = b_1 \cdot q^6$;

$-512 = b_1 \cdot (-2)^6$;

$b_1 = -8$.

г) $b_7 = b_1 \cdot q^6$;

$\frac{7}{32} = 14 \cdot q^6$;

$q^6 = \frac{1}{64}$;

$q = \frac{1}{2}$ яки $q = -\frac{1}{2}$. ◼

7 нче мисал. Бирелгән геометрик прогрессиядә бирелгән A санынннан зуррак буыннарның номерларын күрсәтергә:

а) $1, 3, 9, 27, \ldots; A = 729$;

б) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots; A = \frac{3}{64}$;

в) $b_n = 100\left(\frac{1}{5}\right)^n; A = \frac{1}{2}$;

г) $b_1 = \frac{1}{3}, \; q = \sqrt{2}; \; A = 5\sqrt{2}$.

Чишү. а) Монда $b_1 = 1$, $q = 3$, $b_n = b_1q^{n-1} = 3^{n-1}$. Безгә $3^{n-1} > 729$ тигезсезлеге үтәлә торган номерларны (n) күрсәтергә кирәк. $3^6 = 729$ икәнен эзләп табабыз, ягъни $n = 7$ булганда, $3^{n-1} = 729$. Бирелгән прогрессия үсә баручы булганлыктан, $n > 7$ булган барлык буыннар 729 дан зуррак була.

б) Монда $b_1 = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $b_n = b_1q^{n-1} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Безгә $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{3}{64}$, ягъни $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{32}$ тигезсезлеге үтәлә торган номерларны (n) күрсәтергә кирәк. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ икәнен эзләп табабыз, ягъни $n = 6$ булганда, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32}$ тигезлеге дөрес була.

Бирелгән прогрессия – кими баручы, шунлыктан, $n < 6$ булганда, аның буыннары $\frac{3}{64}$ тән зуррак.

в) Сүз $100\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n > \frac{1}{2}$, ягъни $\left(\frac{1}{5}\right)^n > \frac{1}{200}$ тигезсезлегенең натураль чишелешләре турында бара.

$x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ эзлеклелегенең берничә башлангыч буынын язабыз:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \ldots .$$

Бу эзлеклелекнең бары беренче өч буыны $\frac{1}{200}$ дән зуррак икәне ачык күренә.

г) Биредә $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = \sqrt{2}$, $b_n = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

Безгә $\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} > 5\sqrt{2}$ тигезсезлеге үтәлә торган номерларны (n) күрсәтергә кирәк.

Табабыз:

$$(\sqrt{2})^{n-1} > 15\sqrt{2};$$

$$\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} > 15\sqrt{2};$$

$$(\sqrt{2})^n > 30.$$

$(\sqrt{2})^{10} = \left((\sqrt{2})^2\right)^5 = 2^5 = 32$ икәнен искәрәбез, димәк $n = 10$ булганда, $(\sqrt{2})^n > 30$ тигезсезлеге үтәлә. Ә инде $n > 10$ булганда, ул һичшиксез үтәлә дигән сүз. Әгәр $n = 9$ булса, $(\sqrt{2})^9 = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$. $\sqrt{2} < 1{,}5$, булганлыктан $16\sqrt{2} < 16 \cdot 1{,}5$, ягъни $16\sqrt{2} < 24$, һәм һичшиксез $16\sqrt{2} < 32$. Димәк, $n = 9$ булганда, $(\sqrt{2})^n > 30$ тигезсезлеге үтәлми. Ә $n < 9$ булганда бигрәк тә.

Җавап: а) $n > 7$; б) $n < 6$; в) $n = 1, 2, 3$; г) $n \geqslant 10$.

8 нче мисал. Геометрик прогрессиянең җиденче һәм бишенче буыннары аермасы 48 гә, ә бишенче һәм алтынчы буыннары суммасы шулай ук 48 гә тигез. Бу прогрессиянең уникенче буынын табарга.

Чишү. <u>Беренче этап.</u> *Математик модель төзү.*

Мәсьәләнең шартын болай язарга мөмкин:

1) $\div\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$;

2) $b_7 - b_5 = 48$;

3) $b_5 + b_6 = 48$.

Геометрик прогрессиянең n-нчы буын формуласын кулланып табабыз:

$$b_7 = b_1q^6, \quad b_5 = b_1q^4, \quad b_6 = b_1q^5.$$

Ул чагында мәсьәләнең икенче шартын ($b_7 - b_5 = 48$) болай язабыз:

$$b_1q^6 - b_1q^4 = 48;$$
$$b_1q^4(q^2 - 1) = 48.$$

Ул чагында мәсьәләнең өченче шартын ($b_5 + b_6 = 48$) болай язабыз:

$$b_1q^4 + b_1q^5 = 48;$$
$$b_1q^4(q + 1) = 48.$$

Нәтиҗәдә ике (b_1 һәм q) үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын табабыз:

$$\begin{cases} b_1q^4(q^2 - 1) = 48, \\ b_1q^4(q + 1) = 48. \end{cases}$$

Бу система алда язылган 1) шарт белән берлектә мәсьәләнең математик моделен тәшкил итә.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Ике тигезләмәнең сул якларын тигезләп табабыз:

$$b_1q^4(q^2 - 1) = b_1q^4(q + 1);$$
$$q^2 - 1 = q + 1.$$

(Без тигезләмәнең ике ягын да нульгә тигез булмаган b_1q^4 аңлатмасына бүлдек.)

$q^2 - q - 2 = 0$ тигезләмәсеннән табабыз: $q_1 = 2$, $q_2 = -1$.

Системаның икенче тигезләмәсенә $q = 2$ кыйммәтен куеп исәплибез: $b_1 \cdot 16 \cdot 3 = 48$, ягъни $b_1 = 1$.

Системаның икенче тигезләмәсенә $q = -1$ кыйммәтен куеп исәплибез: $b_1 \cdot 1 \cdot 0 = 48$, ягъни бу тигезләмәнең чишелеше юк.

Шулай итеп, $b_1 = 1$, $q = 2$ – төзелгән тигезләмәләр системасының чишелеше була.

Хәзер мәсьәләдә сөйләнгән геометрик прогрессияне яза алабыз: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

b_{12} не исәпләргә кирәк. Табабыз:

$$b_{12} = b_1q^{11} = 1 \cdot 2^{11} = 2048.$$

Җавап: $b_{12} = 2048$.

3. Чикле геометрик прогрессиянең буыннар суммасы формуласы

Чикле геометрик прогрессия бирелгән булсын:

$$\div\div b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

Аның буыннары суммасын S_n дип билгелибез.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n.$$

Бу сумманы исәпләү формуласын чыгарабыз.

Иң гади очрактан, $q = 1$ дән башлыйбыз. Ул вакытта b_1, b_2, b_3, ..., b_n геометрик прогрессиясе b_1 гә тигез булган n саннан тора ($b_1, b_1, b_1, \ldots, b_1$). Бу саннарның суммасы nb_1 гә тигез.

Хәзер $q \neq 1$ булсын. S_n ны табу өчен, ясалма алым кулланабыз – башта S_nq ны карыйк:

$$S_nq = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)q =$$
$$= b_1q + b_2q + b_3q + \ldots + b_{n-2}q + b_{n-1}q + b_nq =$$
$$= b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{n-1} + b_n + b_nq.$$

Димәк,

$$S_n = b_1 + (b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$
$$S_nq = (b_2 + b_3 + \ldots + b_n) + b_nq.$$

Икенче тигезлектән беренчесен алабыз:

$$S_nq - S_n = b_nq - b_1.$$

Сул якта уртак тапкырлаучы S_n ны җәя тышына чыгарабыз, ә уң якта $b_n = b_1q^{n-1}$ формуласын кулланабыз һәм уртак тапкырлаучы b_1 не җәя тышына чыгарабыз:

$$S_n(q - 1) = b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1;$$
$$S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1);$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Бу – геометрик прогрессиянең беренче n буыны суммасын исәпләү формуласы ($q \neq 1$ очрагы өчен).

9 нчы мисал. Чикле геометрик прогрессия бирелгән:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n.$$

Биредә $b_1 = 3$, $q = 2$, $n = 6$ икәнлеге билгеле. Табарга:

а) прогрессия буыннары суммасын;

б) буыннарның квадратлары суммасын.

Чишү:

а) $S_6 = \dfrac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \dfrac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189.$

б) Алдарак (к. 168 б.) без күргән идек инде: әгәр геометрик прогрессиянең барлык буыннарын да квадратка күтәрсәк, беренче буыны b_1^2 һәм ваклаучысы q^2 булган геометрик прогрессия килеп чыга. Яңа прогрессиянең беренче алты буыны суммасы $S_6 = \dfrac{b_1^2((q^2)^6 - 1)}{q^2 - 1}$ формуласы буенча исәпләнә. Аңа $b_1 = 3$, $q = 2$ не куеп табабыз:

$$S_6 = \frac{9(2^{12} - 1)}{2^2 - 1} = 3 \cdot 4095 = 12\,285.$$

Җавап: а) 189; б) 12 285.

10 нчы мисал. Геометрик прогрессиянең сигезенче буынын табарга, биредә $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Чишү. $b_n = b_1 q^{n-1}$ булганлыктан, табабыз:

$$96 = 3q^{n-1};$$
$$q^{n-1} = 32.$$

Аннан

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$63(q - 1) = q^n - 1 \qquad (2)$$

Алда без $q^{n-1} = 32$ икәнен тапкан идек. Бу тигезлекнең ике ягын да q га тапкырлыйбыз: $q^n = 32q$ була. Формулага q^n урынына $32q$ ны куеп табабыз:

$$63(q - 1) = 32q - 1;$$
$$31q = 62;$$
$$q = 2.$$

$b_1 = 3$ һәм $q = 2$ булганда, b_8 не исәплибез:

$$b_8 = b_1 \cdot q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

Җавап: $b_8 = 384$.

4. Геометрик прогрессиянең характерлы үзлеге

Геометрик прогрессия, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ бирелгән булсын, ди. Аның бер-бер артлы килүче өч буынын: b_{n-1}, b_n, b_{n+1} не карыйбыз. Биредә:

$$\frac{b_n}{q} = b_{n-1},$$

$$b_n q = b_{n+1}$$

икәне билгеле. Бу тигезлекләрне тапкырлап табабыз:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.}$$

Димәк, геометрик прогрессиянең беренчесеннән (чикле прогрессия булганда – соңгысыннан да) тыш һәр буыны квадраты үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннарның тапкырчыгышына тигез була.

Киресе дә дөрес: әгәр эзлеклелекнең (b_n) теләсә кайсы буыны өчен түбәндәге тигезлек үтәлсә:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1},$$

(b_n) – геометрик прогрессия.

Чыннан да, соңгы тигезлекне болай үзгәртергә мөмкин:

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Яки, аерым алганда, $b_2 : b_1 = b_3 : b_2$, $b_3 : b_2 = b_4 : b_3$ h. б. Башкача әйтсәк, эзлеклелекнең һәр буыны белән аннан алда килүче буынның чагыштырмасы бер үк сан булып бара, ягъни геометрик прогрессия бирелгән дигән сүз.

Шулай итеп, без түбәндәге теореманы исбатладык:

Теорема — ***Санлы эзлеклелек, әгәр аның һәр буыны квадраты, беренчесеннән (һәм чикле эзлеклелек булганда соңгысыннан) тыш, үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннар тапкырчыгышына тигез булса һәм бары шул вакытта гына, геометрик прогрессия була*** *(геометрик прогрессиянең характерлы үзлеге).*

Узган параграфта без арифметик прогрессиянең характерлы үзлеген тапкан идек: аның теләсә кайсы буыны үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннарның арифметик уртасына тигез булды. Хәзер геометрик прогрессиянең характерлы үзлеген күрсәтүче $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ тигезлегендә кайбер үзгәртүләр эшлик:

$$\sqrt{b_n^2} = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}};$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

$\sqrt{ab}$ санын *A* һәм *b саннарының геометрик уртасы* дип атыйлар. Шулай итеп, соңгы тигезлек *геометрик прогрессиянең теләсә кайсы буыны модуле үзеннән алда һәм үзеннән соң килүче буыннарның геометрик уртасына тигез* икәнен аңлата. Арифметик һәм геометрик прогрессияләрнең характерлы үзлекләре арасындагы охшашлык бу әйтелештә ачыграк күренә.

11 нче мисал. x-ның нинди кыйммәтләрендә $10x + 7$, $4x + 6$ һәм $2x + 3$ саннары геометрик прогрессия тәзи?

Чишү. Характерлы үзлеге буенча бирелгән аңлатмалар түбәндәге нисбәтне канәгатьләндерергә тиеш:

$$(4x + 6)^2 = (10x + 7)(2x + 3).$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$16x^2 + 48x + 36 = 20x^2 + 44x + 21;$$

$$4x^2 - 4x - 15 = 0;$$

$$x_1 = 2{,}5, \quad x_2 = -1{,}5.$$

Бирелгән $10x + 7$, $4x + 6$, $2x + 3$ аңлатмаларына $x_1 = 2{,}5$ не куеп, тиңдәшле рәвештә табабыз: 32, 16, 8. Бу – чикле геометрик прогрессия. Әлеге аңлатмаларга $x_2 = -1{,}5$ не куеп, −8, 0, 0 не табабыз. Бу – геометрик прогрессия түгел.

Җавап: $x = 2{,}5$.

Прогрессияләр турындагы сүзне тәмамлап, шактый ук катлаулы – прогрессияләргә карата катнаш мәсьәлә тәкъдим итәбез.

12 нче мисал. Үсә баручы чикле геометрик прогрессия төзүче өч сан алганнар. Икенче санны 2 гә арттырып, беренче һәм өченче саннары

үзгәрешсез калдыру нәтиҗәсендә, арифметик прогрессия килеп чыккан. Шуннан соң өченче санны 9 га арттыргач, тагын геометрик прогрессия төзелгән. Башта нинди саннар алынган?

Чишү. <u>Беренче этап</u>. *Математик модель төзү.*

Мәсьәләнең шартын кыскача болай язып була:

1) $\div\div\ b_1,\ b_2,\ b_3;$

2) $\div\ b_1,\ b_2 + 2,\ b_3;$

3) $\div\div\ b_1,\ b_2 + 2,\ b_3 + 9.$

Арифметик прогрессиянең характерлы үзлеге буенча, 2) шарты:

$$b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$$

икәнлеген аңлата. Исәплибез:

$$2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2;$$

$$b_1(1 + q^2 - 2q) = 4. \qquad (3)$$

Геометрик прогрессиянең характерлы үзлеге буенча, 3) шарты:

$$(b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9)$$

икәнлеген аңлата. Исәплибез:

$$(b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9);$$

$$b_1^2q^2 + 4b_1q + 4 = b_1^2q^2 + 9b_1;$$

$$b_1(9 - 4q) = 4. \qquad (4)$$

Шулай итеп, ике үзгәрешле (b_1 һәм q) ике тигезләмә системасын таптык:

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 - 2q) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4. \end{cases}$$

Бу система 1) шарт белән бергә мәсьәләнең математик моделен төзи.

<u>Икенче этап.</u> *Төзелгән модель белән эшләү.*

Системадагы ике тигезләмәнең сул якларын тигезлибез:

$$b_1(1 + q^2 - 2q) = b_1(9 - 4q);$$

$$1 + q^2 - 2q = 9 - 4q$$

(тигезләмәнең ике ягын да b_1 гә, нульгә тигез булмаган санга бүлдек). Табабыз:

$$q^2 + 2q - 8 = 0;$$

$$q_1 = 2,\quad q_2 = -4.$$

Системаның икенче тигезләмәсенә $q = 2$ кыйммәтен куеп, $b_1 = 4$ не табабыз. Һәм b_1 белән q ны билгеләгәннән соң, геометрик прогрессия төзүче өч санны: 4, 8, 16 ны табу кыен түгел.

Системаның икенче тигезләмәсенә $q = -4$ не куеп, $b_1 = \frac{4}{25}$ не табабыз. Һәм b_1 белән q аша геометрик прогрессия төзүче өч санны язабыз: $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Табылган геометрик прогрессиянең беренчесе генә – мәсьәлә шартында күрсәтелгәнчә, үсә баручы прогрессия.

Җавап: 4, 8, 16.

5. Прогрессияләр һәм банк хисаплары

Күз алдына китерегез әле, сез банкка t елга, елына p % өстәлә торган итеп, A сум күләмендә кертем (вклад) керттегез, ди. Сез ике төрле эш итә аласыз: йә кертем сакланган һәр ел ахырында аның буенча процентларны, ягъни $\frac{p}{100} \cdot a$ га кадәр табышны ала аласыз, йә банкка бер генә тапкыр – кертем саклану срогы ахырында гына килә аласыз. Ике очракта да сезнең нинди керем алуыгыз мөмкин?

Беренче очракта, $t = 1$ булганда, сез $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$ сум ала аласыз, $t = 2$ булганда, сезнең гомуми сумма $\left(a + \frac{2p}{100} \cdot a\right)$ сум, $t = 3$ булганда, гомуми сумма $\left(a + \frac{3p}{100} \cdot a\right)$ һ. б. була. Бу хисапның математик моделе – чикле арифметик прогрессия:

$$a,\ A + \frac{p}{100} \cdot a,\ A + \frac{2p}{100} \cdot a,\ A + \frac{3p}{100} \cdot a,\ \ldots,\ A + \frac{tp}{100} \cdot a.$$

Шулай итеп, беренче юл белән эш иткәндә, t ел эчендә сез $a\left(1 + \frac{tp}{100}\right)$ сум аласыз, бу – *гади процентлар формуласы.*

Әгәр банкка кертемнең саклану срогы беткәч кенә килсәгез, $t = 1$ булганда, беренче очрактагы кебек үк, сез $A + \frac{p}{100} \cdot a$, ягъни $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ сум алган булыр идегез. Димәк, сезнең кертем $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ тапкыр артты. Икенче ел ахырында да, өченчесе ахырында да, һ. б. ахырында да шул тапкыр ук арта бара.

Исәп-хисапның математик моделе – чикле геометрик прогрессия:

$$a,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Шулай итеп, икенче юл белән китеп, t ел эчендә сез $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ сум акча аласыз. Бу – *катлаулы процентлар формуласы.*

Конкрет мисал карап үтәбез. Әйтик, кертем – 10 000 сум, банк еллык 10 % ка өсти, саклау вакыты 5 ел булсын. Әгәр гади процентлар стратегиясен сайласагыз, сез саклау вакыты ахырына $10\,000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right)$, ягъни 15 мең сум кайтарып аласыз. Икенче юлны – катлаулы процентлар стратегиясен сайласагыз, саклау срогы ахырына сез $10\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5$, ягъни 16 105,1 сум кайтарып аласыз. Аерманы үзегез бәяләп карагыз.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Нинди эзлеклелекне геометрик прогрессия дип атыйлар?
2. 32, 16, 98, 4, 2, ... эзлеклелеге геометрик прогрессия буламы? Әгәр булса, аның ваклаучысы нәрсәгә тигез?
3. Ваклаучысы а) $q > 1$; б) $0 < q < 1$; в) $q < 0$ тигезсезлеген канәгатьләндерә торган геометрик прогрессиягә мисал китерегез.

4. Геометрик прогрессиянең (b_n) n нчы буыны формуласын языгыз.

5. Геометрик прогрессиянең (b_n) беренче n буыны суммасы формуласын языгыз.

6. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ... эзлеклелеге геометрик прогрессия буламы? Әгәр булса, аның 8 нче буынын; 10 нчы буынын; беренче ун буыны суммасын табыгыз.

7. Геометрик прогрессиянең характерлы үзлеге нидән гыйбарәт?

8. Геометрик прогрессия (b_n бирелгән. Биредә $b_{15} = 3$, $b_{17} = 12$ икәне билгеле. Әгәр: а) прогрессиянең ваклаучысы – уңай сан; б) прогрессиянең ваклаучысы – тискәре сан икәне бирелсә, b_{16} ны табыгыз.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

- Сез яңа математик модель – санлы эзлеклелек (натураль аргумент функциясе) белән таныштыгыз.
- Сез математика теленең яңа атамаларын белдегез: санлы эзлеклелек, эзлеклелекнең n-нчы буыны;
  монотон (үсә баручы, кими баручы) эзлеклелек;
  арифметик прогрессия, арифметик прогрессиянең аермасы;
  геометрик прогрессия, геометрик прогрессиянең ваклаучысы.
- Без яңа тамгалар керттек:

  (y_n) яки y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... – санлы эзлеклелек өчен;

  ÷ – арифметик прогрессия өчен;

  ÷÷ – геометрик прогрессия өчен;

  S_n – эзлеклелек (x_n) буыннары суммасы $x_1 + x_2 + ... + x_n$ өчен.
- Без санлы эзлеклелек бирелешенең өч юлын тикшердек: аналитик; сүзләр ярдәмендә, рекуррент.
- Без арифметик һәм геометрик прогрессияләрнең берничә үзлеген билгеләдек һәм нигезләдек. Аларны бер таблицада күрсәтәбез.

	Арифметик прогрессия	Геометрик прогрессия
Билгеләмә	$a_1 = a, \ a_n = a_{n-1} + d$	$b_1 = b, \ b_n = b_{n-1} \cdot q,$ $b \neq 0, q \neq 0$
n-нчы буын формуласы	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Характерлы үзлеге	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$\lvert b_n \rvert = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$
n-буын суммасы формуласы	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

ТИКШЕРЕНҮ ЭШЛӘРЕ ӨЧЕН ТЕМАЛАР

1. Санлы эзлеклелекләр аларны һәм үзлекләре.
2. Прогрессияләр ярдәмендә реаль хәлләрне сурәтләү.

5 БҮЛЕК. КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА ҺӘМ ИХТИМАЛЛЫЛЫК ТЕОРИЯСЕ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

§ 18. Комбинаторика мәсьәләләре
§ 19. Статистика: мәгълүмат дизайны
§ 20. Иң гади ихтималлылык мәсьәләләре
§ 21. Эксперименталь бирелмәләр һәм вакыйгаларның ихтималлылыгы

§ 18. КОМБИНАТОРИКА МӘСЬӘЛӘЛӘРЕ

Комбинаториканың иң гади мәсьәләләре балаларның кубиклар белән уйнап утыруын хәтерләтә. Билгеле бер чикле сандагы кубиклар, ягъни ниндидер чикле күплекнең элементлары бар, һәм менә шушы кубиклардан (элементлардан) төзелгән теге яки бу комбинацияләрнең санын исәпләргә кирәк. Әгәр кирәкле комбинацияләр бик күп булмаса, аларны гап-гади генә санап чыгарга, ягъни барлык мөмкинлекләрне берәмлекләп карап чыгарга мөмкин. *Вариантларны карап чыгу алымы* шуннан гыйбәрәт тә инде. Мәсәлән, 1, 5, 9 цифрларыннан, цифрлары кабатланмый торган өчурынлы сан төзергә кирәк булса, барлык вариантларны язып чыгу кыен түгел. Болар: 159, 195, 519, 591, 915 һәм 951. Димәк, шундый алты сан төзергә мөмкин икән.

Игътибар итегез, шушы гади гына мисалда да без очраклы түгел, ә *уйлап оештырылган* карап чыгуны күрәбез. Башта беренче урынга 1 не куйдык һәм мондый ике генә вариант: 159 һәм 195 барын күрдек. Аннан соң беренче урынга 5 не куйдык, тагын ике вариант: 519 һәм 591 не таптык. Ниһаять, 9 белән башланган 915 һәм 951 саннарын төзедек.

Вариантларны яхшылап уйлап санап чыгу комбинацияләр саны күбрәк булган катлаулы очракларда бик әһәмиятле.

1 нче мисал. 2, 4, 7 цифрларыннан, бер генә цифр да ике тапкырдан күбрәк кабатланмаслык итеп, өчурынлы сан төзергә кирәк.

а) Шундый иң кечкенә санны табарга.
б) Шундый иң зур санны табарга.
в) 2 дән башланган шундый ничә сан табарга мөмкин?
г) Шундый ничә сан табарга мөмкин?

Чишү. а) Иң кечкенә сан 224, чөнки беренче яки икенче урынга 2 урынына 4 яки 7 цифрын куйсак, йә йөзләр саны, йә дистәләр саны артачак, ә инде 2 цифры кабатланганга күрә, соңгы урында 4 (7 түгел) торырга тиеш.

б) Нәкъ шулай ук фикерләп, иң зур санны – 774 не табабыз.

в) Башта цифрлары кабатланмаган саннарны атыйбыз; болар 247 һәм 274. Аннан соң 2 цифры кабатлана торган саннарны атыйбыз. Болар 224, 227, 242, 272. 4 цифры һәм 7 цифры кабатлана торган саннар берәр генә: 244 һәм 277. Шулай итеп, барысы 2+4+1+1 = 8 сан килеп чыкты.

г) 4 цифрына башланган саннар санын в) пунктындагы кебек санап чыгарга мөмкин, алар шулай ук сигез була. Һәм, билгеле инде, 7 гә башланган саннар саны да 8 гә тигез. Барысы 24 сан килеп чыга.

Җавап: а) 224; б) 774; в) 8; г) 24.

г) пунктындагы җавап өчен а) һәм б) ны чишеп тормасак та була иде. Әмма шундый һәр мәсьәләдә безгә санарга кирәкле берничә типик комбинацияне язып карау файдалы була.

Барлык математик мәсьәләләрдәге кебек үк, 1 г) мисалын да башка юл белән чишеп чыгарга мөмкин. Башта 2, 4, 7 цифрларыннан төзергә мөмкин булган барлык өчурынлы саннар санын табабыз. Без әле соңрак танышасы *тапкырлау кагыйдәсе* буенча аларның саны 3 · 3 · 3 = 27 була. Ә хәзер цифрлар өч тапкыр кабатланган саннар санын алабыз. Андый саннар өч кенә: 222, 444, 777. Димәк, җавап: 27–3 = 24.

1 в) мисалы чишелешен дә башкача язарга мөмкин: өчурынлы санны адымлап, нindидер «катларга бүленгән» план буенча күрсәтәбез. Беренче 2 цифрын өске турыпочмаклыкка урнаштырабыз (128 нче рәсем) һәм аннан өч «юл» җибәрәбез. Алар икенче цифрны сайлауга туры килә. Болар йә 2, йә 4, йә 7. Икенче баскычта өч турыпочмаклык табабыз һәм өченче цифрны сайлауга күчәбез. Әгәр икенче цифр 2 икән, шарт буенча өченче цифр 4 кә яки 7 гә тигез булырга мөмкин. Димәк, биредә ике вариант:

Рәс. 128

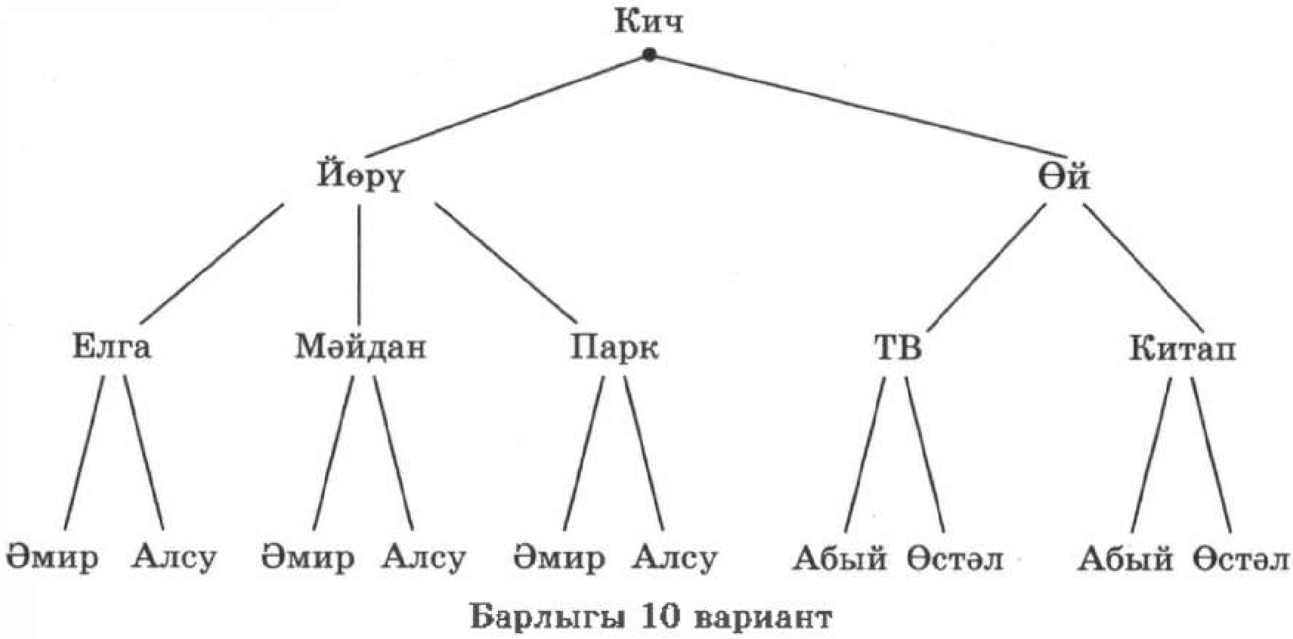
224 һәм 227 саннары килеп чыга. Әгәр икенче цифр 4 кә яки 7 гә тигез икән, өченче цифр өчен чикләмәләр юк, ул 2 дә, 4 тә, 7 дә була ала. Димәк, бу очракларның һәрберсендә өчурынлы сан төзүнең өчәр варианты мөмкин. Биредә 242, 244, 247, 272, 274, 277 саннары килеп чыга.

Без *мөмкин табылган вариантлар агачын* төзедек. Болай фикер йөртүнең өстенлеге – аның күрсәтмәле булуында, барлык вариантлар да нче рәсемдә күренә (128 нче рәсем) һәм мөмкинлекләрне санап чыгуның оештырылу тәртибе ачык аңлашыла.

2 нче мисал. Бу кичне төрлечә үткәрергә мөмкин: елга буена, мәйданга, паркка барып йөреп килергә, аннан соң Әмиргә яки Алсуга кунакка керергә була. Өйдә генә калырга да мөмкин, башта телевизор карарга яки китап укырга, ә аннан соң абый белән уйнарга яки язу өстәлендә тәртип ясарга була. Мөмкин табылган вариантлар агачын ясарга.

Җавап: Вариантлар агачы 129 нчы рәсемдә бирелгән.

3 нче мисал. Урнада тотып карауга нәкъ бертөрле ике ак һәм бер кара шар бар. Кара шар алынса, аны кире урнага салалар, ә ак шарны кырыйга куялар. Мондый операция өч тапкыр рәттән эшләнә.



Рәс. 129

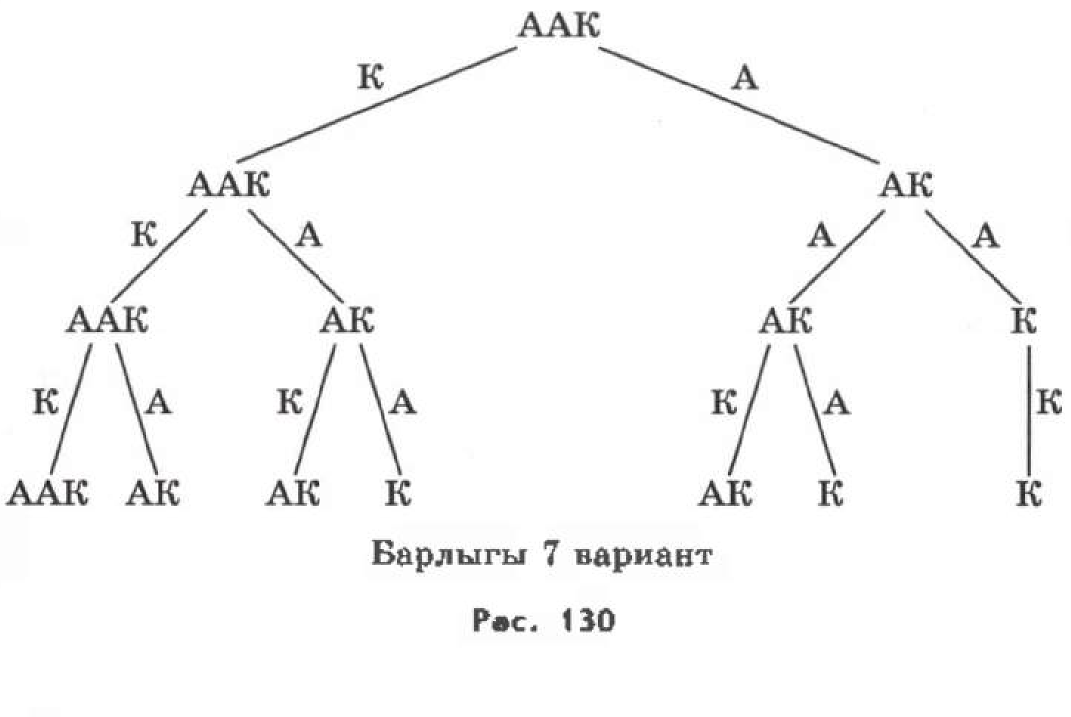
а) Мөмкин табылган вариантлар агачын ясарга.

б) Ничә очракта алынган өч шар бер үк төсле була?

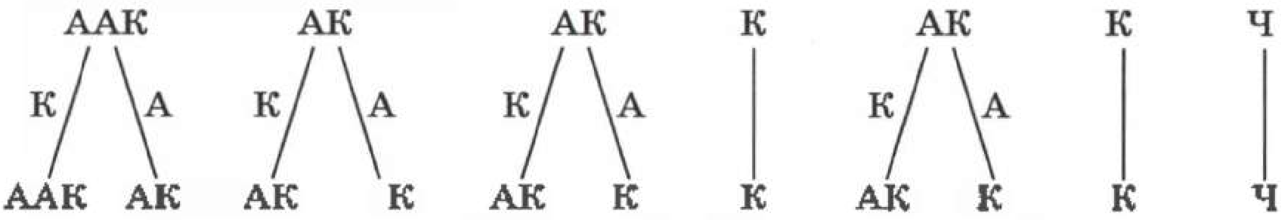
в) Ничә очракта алынган шарлар арасында аклар күбрәк була?

г) Шарларны дүрт тапкыр алу очрагының мөмкин табылган вариантлар агачын ясарга.

Чишү. а) Вариантлар агачы 130 нчы рәсемдә бирелгән. Ике ак шарны тартып чыгару очрагы үзенчәлекле. Бу очракта бер кара шар гына кала һәм ахырдан ул гына алына да.



Рәс. 130



Барлыгы 11 вариант

Рәс. 131

б) Вариантлар агачыннан моның бер генә очракта, өч тапкыр рәттән кара шар алынганда гына булуы мөмкинлеге күренә.

в) Өч ак шар була алмый. Димәк, сүз ике ак шар һәм бер кара шар турында бара. Бу өч очракта мөмкин: (вариантлар агачында ААК, АКА, КАА).

г) Биредә вариантлар агачының соңгы баскычына тагын бер баскыч өстәлә һәм ул дүртенче сайлап алуга туры килә. (131 нче рәсем).■

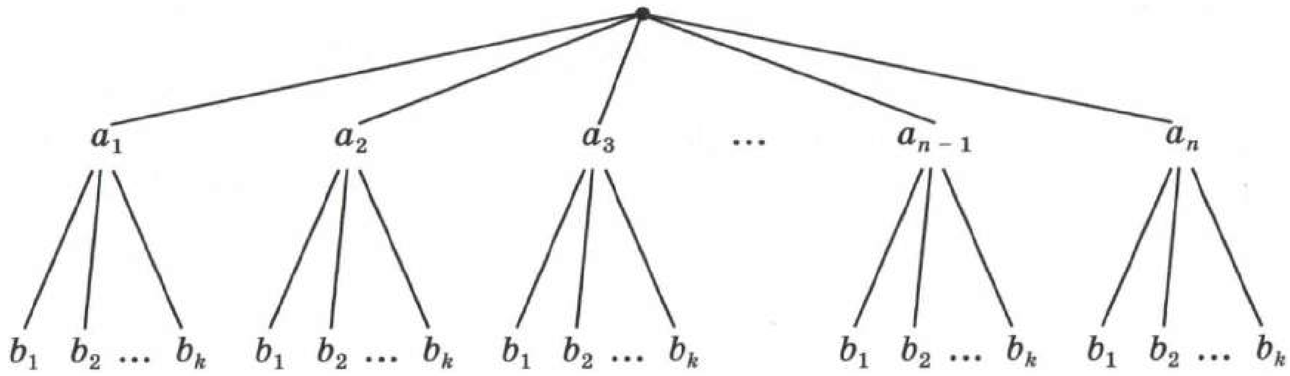
Мондый диаграммалар вариантлар саны чагыштырмача аз санда булганда гына уңай, мәсәлән, йөзләрчә комбинацияләр өчен вариантлар агачын ясап булмаячак. Димәк, башкача чишү юлы сорала. Төрле сынауларда еш кына тапкырлау кагыйдәсен кулланлар.

ТАПКЫРЛАУ КАГЫЙДӘСЕ

Ике сынау: A һәм B ны үткәрүдә мөмкин булган барлык нәтиҗәләр санын табу өчен A сынавының барлык нәтиҗәләре санын B сынавының барлык нәтиҗәләре санына тапкырларга кирәк.

Тапкырлау кагыйдәсен аңлату өчен вариантлар агачын ясыйбыз. Беренче баскычта A сынавының барлык нәтиҗәләре: a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n саны китерелгән. Әлеге нәтиҗәләрнең һәркайсыннан соң B сынавының барлык нәтиҗәләре: b_1, b_2, b_3, ..., b_{k-1}, b_k булырга мөмкин, чөнки барлык сынаулар да бәйсез үткәрелә. Исәпләүләрдән $\underbrace{k + k + k + \ldots + k}_{n} = nk$ нәтиҗә килеп чыга. (132 нче рәсем).

Тапкырлау кагыйдәсен башкача да, ике сынауның нәтиҗәләре таблицасын кулланып та аңлатырга мөмкин. Моны мисалда аңлатып үтәрбез.



Барысы: n тапкыр k, ягъни nk нәтиҗә

Рәс. 132

4 нче мисал. Иртәнге ашка Азатның кабартма, бутерброд, прәннек яки кекс сайлап алып, кофе, сок яки кефир эчү мөмкинлеге бар. Азатның ничә төрле иртәнге аш варианты бар?

Чишү. Барлык вариантларны таблицага җыябыз.

	Кабартма	*Бутерброд*	*Прәннек*	*Кекс*
Кофе	Кофе, кабартма	Кофе, бутерброд	Кофе, прәннек	Кофе, кекс
Сок	Сок, кабартма	Сок, бутерброд	Сок, прәннек	Сок, кекс
Кефир	Кефир, кабартма	Кефир, бутерброд	Кефир, прәннек	Кефир, кекс

Ашамлык һәм эчемлек сайлап алу үзара бәйләнмәгән, шунлыктан һәр шакмакта бер иртәнге аш варианты була. Киресе дә дөрес: иртәнге ашның теләсә кайсы варианты шакмакларның берсендә урнашкан. Димәк, вариантлар саны шакмаклар санына, ягъни 12 гә тигез.

Җавап: 12.

Конкрет мәсьәләдә, һәр очракта таблица ясап, аны тулысынча тутыру мәҗбүри түгел. Тапкырлау кагыйдәсен генә куллану да җитә. 4 мисалның чишелеше болай да була ала иде: «*А* сынавы – ашамлык сайлау, аның дүрт нәтиҗәсе бар, ә *B* сынавы – эчемлек сайлау, аның өч нәтиҗәсе бар. Ашамлык сайлау һәм эчемлек сайлау – бер-берсенә бәйле түгел. Тапкырлау кагыйдәсе буенча җавапны табабыз: $4 \cdot 3 = 12$».

ГОМУМИ ТАПКЫРЛАУ КАГЫЙДӘСЕ

Әгәр А сынавы n нәтиҗәгә ия булса, аларның һәркайсыннан соң В сынавы k нәтиҗәгә ирешә алса, А һәм В сынауларын бер бер артлы үткәргәннән соң барлыгы nk нәтиҗә килеп чыгарга мөмкин.

Ике сынау өчен тапкырлау кагыйдәсен турыпочмаклы таблицалар кулланып аңлатуның уңайлыгын күреп уздык. Тапкырлау кагыйдәсе – бәйсез сынаулар саны өч, дүрт, биш һ. б. булганда да дөрес. Аңлату өчен тиңдәшле вариантлар агачын ясарга һәм мөмкин булган вариантларны санарга кирәк.

Түбәндәге мисалны өч төрле: санап (карап) чыгу, вариантлар агачы ярдәмендә һәм тапкырлау кагыйдәсе буенча чишеп карарбыз.

5 нче мисал. Коридорда өч лампочка бар. Алар барысы да янмаган очракны да кертеп, коридорны яктыртуның ничә варианты бар?

Чишү. Беренче юл (вариантларны карап чыгу). Лампочкаларны номерлыйбыз, ә аларның януын яки янмавын + яки – белән күрсәтәбез. Ул чагында яктырту вариантларын санап чыгарга да мөмкин: +++, ++–, +–+, +––, –++, –+–, ––+, –––. Барысы сигез вариант.

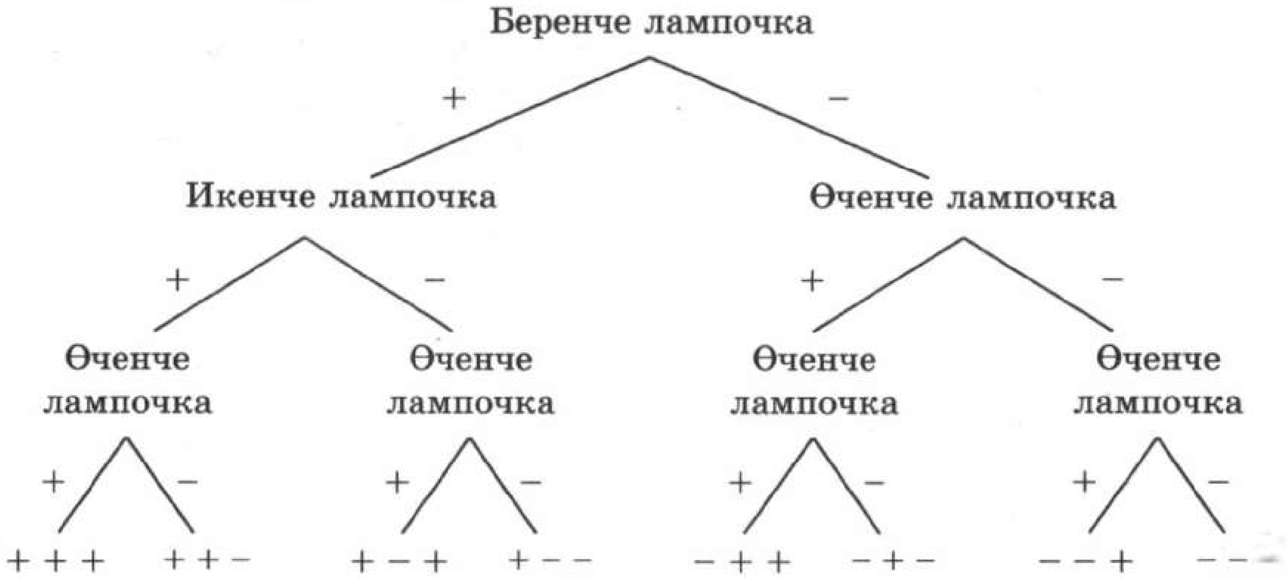


Рис. 133

Икенче юл (вариантлар агачы). 133 нче рәсемдә коридорны яктыртуның барлык сигез варианты да күрсәтелгән.

Өченче юл (тапкырлау кагыйдәсе). Беренче лампочка йә яна, йә юк, ягъни ике нәтиҗә булырга мөмкин. Икенче һәм өченче лампочкалар турында да шуны ук әйтергә мөмкин. Аларның януянмавы бер-берсенә бәйләнмәгән дип фаразлыйбыз. Тапкырлау кагыйдәсе буенча яктырту вариантлары саны: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Җавап: 8.

Бу өч чишү вариантының үз өстенлекләре һәм үз җитешсезлекләре бар. Чишү юлын үзегез сайлагыз. Шулай да, тапкырлау кагыйдәсенең бик күп төрле мәсьәләләрне чишәргә мөмкинлек бирүен искәртәбез.

Мәсәлән, ул математикадагы аеруча мөһим *факториал* төшенчәсен дә китерә.

6 нчы мисал. Гаиләдә алты кеше, ә аш өстәле тирәсендә алты урындык бар. Һәр көнне кичке ашка бу алты урындыкка төрлечә утырырга булганнар. Гаилә әгъзалары моны кабатланусыз ничә көн дәвам итә алалар?

Чишү. Җавапта көтелмәгән зур сан килеп чыга – ике ел диярлек! Моны аңлатып китик. Уңайлык өчен урындыкларны номерлыйбыз: №1, №2, №3, №4, №5, №6 һәм гаилә әгъзалары (әби, бабай, әни, әти, кыз, ул) урыннарга чиратлап утыралар дип фаразлыйбыз. Ничә төрле утыру варианты барын исәплик. Әйтик, беренче булып әби утыра, ди. Аның урындык сайлауга алты варианты бар. Икенче булып бабай утыра һәм бәйсез рәвештә калган биш урындыкның берсен сайлый. Әни өченче булып сайлый һәм ул дүрт урындыкның берсенә утыра. Әтинең инде – өч, кызның – ике варианты була, ә малай калган бердәнбер урындыкка утыра. Тапкырлау кагыйдәсе буенча утыруның $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ төрле ысулы барлыгын (ике елга якын) табабыз.

Җавап: 720 көн.

Билгеләмә. Рәттән килүче беренче n натураль санның тапкырчыгышын $n!$ дип билгелиләр һәм **«эн факториал»** дип укыйлар:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Инглиз сүзе *factor*ның бер мәгънәсе – тапкырлаучы. «*Эн факториал*» якынча «*n* тапкырлаучыдан торучы» дип тәрҗемә ителә. $n!$ өчен беренче берничә кыйммәтне китерәбез:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Биредә n арту белән $n!$ кыйммәтләре бик тиз үсә. Мәсәлән, $10!$ 3,5 миллионнан зуррак, ә $15!$ якынча 1,3 триллион тирәсе була.

$n!$ белән бәйле исәпләүләрдә түбәндәге формуланы куллану уңай була:

Формула	Аңлату
$n! = (n-1)! \cdot n$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$ $= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

Мәсәлән, $\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!}$ кыйммәтен исәпләү өчен, башта дүрт факториалны табу һич тә мәҗбүри түгел. Башта кыскартулар ясарга кирәк:

$$\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 4!}{6! \cdot 4! \cdot 5} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

7 нче мисал. а) Дүрт карак ничә вариантта дүрт якка берәмләп кача ала?

б) 9 «А» сыйныфында чәршәмбе көнне җиде дәрес: алгебра, геометрия, әдәбият, рус теле, татар теле, биология һәм физкультура. Чәршәмбе расписаниесенең ничә варианты бар?

Чишү.

а) Караклар чираттан кача башлыйлар, дип алыйк. Ул вакытта беренчесе дүрт варианттан юнәлеш сайлый ала, икенчесе – өч, өченчесе – ике варианттан, ә соңгысына бер генә вариант кала. Җавапны тапкырлау кагыйдәсе буенча табабыз: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

б) Алгебра өчен расписаниедә урнашуның җиде варианты бар. Алгебра сайланса, геометриянең алты варианты була. Ә алгебра һәм геометрия урнашса, әдәбият өчен биш вариант кала һ. б. Тапкырлау кагыйдәсе буенча табабыз: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

Җавап: а) 24; б) 5040.

Күргәнебезчә, мәсьәләнең шартлары төрле, ә алар барысы да бер үк юл белән диярлек чишелә. Димәк, мондый типтагы мәсьәләләрне чишү өчен ниндидер гомуми кагыйдә булырга тиеш. Ул чикле күплек элементларының урынын алыштыру турындагы теорема рәвешендә әйтелә.

Теорема | ***Төрле n элементны n төрле урынга берәрләп n юл белән урнаштырырга мөмкин.***

«Урнаштыру» атамасы урынына «алыштырма» атамасын куллану күбрәк кулланыла, шунлыктан бу теореманы «*n элементтан торучы күплектә алыштырмалар саны n! га тигез*» дип тә әйтәләр. Кыскача формула рәвешендә языла:

$$P_n = n!$$

Бу кыскартудагы *P* хәрефе инглиз фигыле *permute (permutation)* ның беренче хәрефеннән алынган, ул «урыннар алыштырырга» («урын алыштыру») дип тәрҗемә ителә. Мәсәлән, $P_3 = 3! = 6$, $P_7 = 7! = 5040$ һ. б.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Тугыз катлы йортның һәр катында 4 фатир урнашкан. Подъезддагы иң зур фатир номеры – 108. Бу подъезддагы иң кечкенә фатир номерын табыгыз.

2. Унсигез катлы йорт һәр катында 4 әр фатир булган 3 подъездан тора. Бу йортта барысы ничә фатир бар?

3. Ипи кибетендә сатып алучыларга кара ипинең 5 сортын тәкъдим итәләр. Кәрим белән Таһир бер-берсенә бәйсез рәвештә берәр ипи сатып алалар. Моның ничә төрле варианты бар?

4. Ипи кибетендә сатып алучыларга кара ипинең 5 сортын тәкъдим итәләр. Таһир ипине Кәримнән соң ук сатып ала, әмма ул Кәрим алган ипине алмый. Мондый сатып алуның ничә варианты бар?

5. Шигырь тексты буенча багу өчен уйлап тормыйча гына строфа номерын, юл номерын әйтәләр һәм шушы юлны укыйлар. А.С.Пушкинның «Евгений Онегин» шигъри романында икенче бүлек тексты буенча багуның ничә варианты бар?

6. Ике светофор бәйсез эшлиләр. Аларның һәрберсендә кызыл,

сары яки яшел ут янарга мөмкин. Светофорлар эшенең вариантлар агачын ясагыз. Ничә вариант бар?

7. Ике сынау өчен тапкырлау кагыйдәсен әйтегез.

8. 3, 8, 9 цифрларыннан (аларны кабатламыйча) ничә икеурынлы сан төзергә мөмкин?

9. 0, 3, 8, 9 цифрларыннан (аларны кабатларга мөмкин) ничә икеурынлы сан төзергә мөмкин?

10. 0, 3, 8, 9 цифрларыннан (аларны кабатламыйча) ничә икеурынлы сан төзергә мөмкин?

11. 0, 3, 8, 9 цифрларыннан кабатлауларсыз ничә икеурынлы сан төзергә мөмкин? Вариантлар агачын ясагыз.

12. Уен кубигын ике тапкыр чөяләр. Мөмкин табылган төшү нәтиҗәләре санын табыгыз.

13. $5!$ саны $(3! + 4!)$ санынннан ничә тапкыр зуррак?

14. Тигезләмәне чишегез: $2 \cdot x! + 5! = 10\ 200$.

15. n элементтан торучы күплектәге алыштырмалар турында теореманы әйтегез.

§ 19. СТАТИСТИКА: МӘГЪЛҮМАТ ДИЗАЙНЫ

Конкрет мисалдан башлыйк. Әйтик, 9 нчы «А» һәм «Б» сыйныфларында 50 укучының буйларын (сантиметрларда) үлчәгәннәр, ди. 50 саннан торган тупланма табылган. Аларның иң кечкенәсе 140 тан кечерәк, ә иң зурысы 200 дән зуррак булыр дип уйламыйбыз. Үлчәү алынган тәртиптә барлык саннарны өтер аша бер юлга язарга мөмкин. Ике баганага, сыйныфларның исемлекләре буенча урнаштырырга да була. Шулай ук билгеле бер 5×10 таблицасы рәвешендә язарга мөмкин, һ. б. Нәтиҗәдә үткәрелгән үлчәүләр турында тулы мәгълүмат җыелган булачак. Кызганычка каршы, бу мәгълүмат, әгәр анда *барлык* бирелгәннәр керә икән, ничек кенә урнаштырылса да, авыр укылачак: күп урын ала, күрсәтмәле булмый, тәртипкә салынмаган һ. б.

Ә хәзер 50 генә түгел, ә 500, 5000 яки миллион төрле саннан торган тупланмаларны күз алдына китереп карагыз. Мәсәлән, агымдагы елда Саклык банкына кертемнәрнең саны һәм күләме яки ил буенча нинди дә булса тармак предприятиеләренең җитештерүчәнлеге турында саннар, барлык сайлау участокла-

рында тавыш бирү нәтиҗәләре һ. б. Бердәнбер акыллы чыгу юлы – беренче үлчәүләрнең гомуми санын бик күпкә киметеп, аларның беренче бирелешен нинди юл белән дә *үзгәртү*. Статистикада төп мәсьәләләрнең берсе нәкъ менә мәгълүматны тиешенчә *эшкәртүдән* гыйбарәт. Билгеле, статитиканың башка мәсьәләләре дә күп: мәгълүматны җыю һәм саклау, төрле фаразлар эшләү, дөреслекне бәяләү һ. б. Тик аларның берсен дә бирелгәннәрне эшкәртмичә генә хәл итеп булмый. Шулай итеп, беренче чиратта мәгълүматны статистик юллар белән эшкәртүне өйрәнербез. Кагыйдә буларак, башта алынган мәгълүматны үзгәртү тәртибе шундый:

1) башта үлчәү бирелмәләрен *тәртипкә салалар һәм төркемлиләр*;

2) аннан соң *бирелмәләр бүленеше таблицаларын* эшлиләр;

3) бүленеш таблицаларын бүленеш графикларына күчерәләр;

4) ниһаять, алынган мәгълүматларның төп санлы характеристикалары тупланган аз сандагы *бирелмәләр паспортын* табалар.

Бер конкрет үлчәүне билгеләп, мәгълүмат эшкәртү процессында аның бирелмәләренең ничек үзгәрүен күзәтербез.

Үлчәү (Ү). Шәһәрнең бер предприятиесендә эшләүче 50 хезмәткәрнең өйдән эшкә кадәр күпме вакыт сарыф итүе турында сорашу үткәргәннәр. Түбәндәге бирелмәләр (минутларда, 10 минутка кадәр төгәллек белән) алынган.

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

1. Мәгълүматны төркемләү. Иң беренче эш итеп, үлчәү бирелмәләренең нинди кысаларда булу мөмкинлеген бәяләргә кирәк. Берәү дә 10 минуттан кимрәк (ягъни 0 минут) вакытны күрсәтмәгән (эш белән өй бер урында була алмый), ә 180 минуттан (өч сәгатьтән) артык – шулай ук эшкә бару өчен чиксез озак вакыт! Димәк, бу үлчәүләрдә 10, 20, 30, ...160, 170, 180 саннары була алыр иде. Без *бирелмәләрнең гомуми рәтен* төзедек. Алар, кагыйдә буларак, *үсә бару тәртибендә* урнашалар.

Шулай итеп,

Үлчәү	Берелмәләрнең гомуми рәте
Юлны үтү вакыты, мин.	10, 20, 30, ..., 170, 180

Хәзергә «бирелмәләрнең гомуми рәте» атамасын аңларга тырышыйк.

1 нче мисал. Түбәндәге үлчәүләрдә бирелмәләрнең гомуми рәтен язарга: а) сезнең мәктәп укучыларының туган айлары; б) туганнарыгыз һәм танышларыгызның туган еллары; в) банктагы кертемнәргә еллык өстәмә проценты; г) русча шигырьнең беренче юлындагы сүзләрнең беренче хәрефләре.

Чишү. а) Барысы 12 ай булырга мөмкин. Әгәр аларның исемнәре белән генә түгел, ә номерлары буенча санасак, бирелмәләрнең гомуми рәте:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

б) Сезнең 100 яшьтән дә олырак туганыгыз яки танышыгыз юктыр, ә яңа туган балалар очрарга мөмкин. Димәк, бирелмәләрнең гомуми рәте: 1914, 1915, 1916, ... 2010, 2011, 2012, 2013, 2014.

в) Үзен үзе хөрмәт итүче бер генә банк та 15% тан артыгын бирми. Ә Россия Саклык банкының аерым бер кертемгә куелган 0,1% ын иң түбән бәя итеп алып була. Димәк, бу очракта бирелмәләрнең гомуми рәте мондый:

0,1; 0,2; 0,3; ...0,9; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...14; 14,5; 15.

г) Гомумән алганда, рус алфавитының *А* дан *Я* га кадәр барлык хәрефләре дә булырга мөмкин. Тик *Ь*, *Ъ*, *Ы* хәрефләренә бер сүз дә башланмый, аларны исәпкә кертмибез. Калган хәрефләрне тәртип буенча номерлап, санлы гомуми рәткә күчәбез: 1, 2, 3, ..., 29, 30. ◼

Статистикада билгеләмәләр алгебра яки геометриядәге кебек төгәл үтәлмәскә дә мөмкин. Мәсәлән, 1 б) пунктында 1914, 1915, ..., 2014 эзлеклелегенә 1912, 1913 саннарын өстәүдән ул бирелмәләрнең гомуми рәте булудан туктамый. 1 в) пунктында еллык процентларны уннан бергә кадәр төгәллек белән үлчәргә мөмкин иде: 0,1; 0,2; ... ; 1; 1,1; ...; 14,9; 15.

Конкрет үлчәүләр ясаганда гомуми рәттәге ниндидер бирелмәләр бөтенләй очрамаска да мөмкиннәр. Димәк, үлчәүнең реаль нәтиҗәләрен бирелмәләрнең гомуми рәтеннән аерырга кирәк. Мәсәлән, (Y) үлчәвендә безгә 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120 нәтиҗәләре генә очрады. Бу саннарның һәркайсын үлчәүнең вариантасы дип йөртәләр.

***Үлчәү вариантасы** – бу үлчәүдә алынган нәтиҗәләрнең берсе.*

Әгәр үлчәүнең бөтен варианталарын тәртип буенча санап чыксак (кабатлаусыз), үлчәү бирелмәләре рәте килеп чыга. Безнең (Y) үлчәвендә ул – 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120.

Шулай итеп,

Үлчәү	**Үлчәү бирелмәләренең гомуми рәте**	**Үлчәү бирелмәләре рәте**
Юлны үтү вакыты, мин.	10, 20, 30, ..., 170, 180	10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120

2 нче мисал. Шигырьләрдәге беренче ике юлга кергән барлык төрле хәрефләрдән торучы үлчәү бирелмәләре рәтен язарга:

а) « Не говори никому, / Все, что ты видел, забудь ...»;*

б) «Это дерево сосна,/ И судьба сосны ясна ...»**

Чишү. а) һәм б) пунктларында бирелмәләрнең гомуми рәте – рус алфавитындагы барлык хәрефләр. ◙

а) *а, б, в, г, д, е, ё, з, и, к, л, м, н, о, р, с, т, у, ч, ы, ь.*

Биредә 33 урында 21 хәреф, хәрефләр аз кабатлана.

б) Бирелмәләр рәте: *а, б, в, д, е, и, н, о, р, с, т, у, ы, ь, э, я.*

Биредә 30 урында 16 хәреф, кабатланулар күбрәк, «с» хәрефе 6 тапкыр очрый.

Күргәнебезчә, конкрет үлчәүнең кайбер варианталары бер үк дәрәҗәдә түгел. Кайберләре күп тапкыр очрый, кайберләре – сирәгрәк, ә кайберләре бер генә тапкыр очрый.

* О. Мандельштам шигыреннән.

** Ю. Минералов шигыреннән.

Билгеләмә. **Конкрет үлчәүнең барлык берелмәләре арасында варианталарның берсе *k* тапкыр очраса, *k* санын бу вариантаның кабатланышы дип атыйлар.**

Мәсәлән, (Y) үлчәвендә 60 минут – 8 тапкыр, ә 120 минут бер тапкыр гына очрады. Димәк, 60 вариантасының кабатланышы 8 гә, ә 120 вариантасының кабатланышы бергә тигез.

Киләсе эшкәртү алдыннан үлчәү берелмәләрен *төркемлиләр*. Моның ничек эшләнүен (Y) үлчәве мисалында карыйбыз:

2	10	2	3	4	5	3	8	9	4
3	5	2	5	3	3	5	6	6	5
3	4	6	5	10	6	9	1	2	5
9	8	2	4	5	1	5	4	3	4
6	12	3	4	6	2	6	1	5	6

Юллар буйлап, чираттагы нәтиҗәне сыза барабыз, ә һәр сызуны берелмәләр рәтендәге тиндәшле варианта астында кабатлыйбыз. Беренче юлдагы беренче 2, 10, 2 нәтиҗәләрен исәпкә алдык һәм сыздык. Әлеге сызыкларны алдан язылып куелган гомуми рәттә кабатлап сызабыз.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//								/		

Беренче юлны узганнан соң менә нәрсә килеп чыкты: анда 2, 3, 4 варианталары – икешәр тапкыр, 5, 8, 9, 10 варианталары берәр тапкыр очрады.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//	//	//	/			/	/	/		

Беренче ике юлны узганнан соң нәтиҗә шундый:

11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	///	////	//	////	//		/	/	/		

Исәпләүләрне уңайрак алып бару өчен, һәр бишенче сызыкны беренче дүрт сызыкка аркылы итеп, башкача авыштырабыз. Практикада барлык сынаулар бер генә урында алып барыла, билгеле. Безнең мисалдагы кабатланышлар шундый соңгы рәвешне

алдылар:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
///	~~////~~ /	~~////~~ ///	~~////~~ //	~~////~~ ~~////~~	~~////~~ ///	//	///	//	/

Хәзер бирелмәләрнең төркемләшкән рәтен төзергә мөмкин. Анда һәр варианта үлчәүдә кабатланган санда кабатлана, ягъни һәр вариантаның кабатланышы күрсәтелгән була:

$$1, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{6}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{8}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{7}, \underbrace{5, \ldots, 5}_{10}, \underbrace{6, \ldots, 6}_{8}, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 12$$

Мәгълүмат эшкәртүнең беренче адымы – аны тәртипкә салу һәм төркемләү шуның белән тәмамлана.

2. Мәгълүматның таблицада бирелеше. Таблицага үлчәүнең бирелмәләре рәтен һәм тиңдәшле варианталарның кабатланышларын кертәбез. *Бирелмәләрнең бүленеше таблицасын* табабыз. (Y) үлчәвендәге таблица шундый була:

	Варианта (дистә минутларда вакыт)										Сумма
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	
Кабатланыш	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50

Әгәр барлык кабатланышларны кушсак, үлчәүнең барлык бирелмәләре саны – *үлчәүнең күләме* килеп чыга. 50 хезмәткәрдән сорашу үткәргәнлектән, (Y) үлчәвенең күләме дә 50 гә тигез була. Практикада тикшерү өчен вакытларның табылган кабатланышларын кушып карыйлар: сумма үлчәүнең күләменә тигез булырга тиеш.

Бирелмәләр бүленешен бәяләгәндә, мәсәлән, 50 бирелмә арасында 1 вариантасының кабатланышы 3 булу зур әһәмияткә ия түгел. Бирелмәләр бүленешен бәяләгәндә, мәсәлән, 50 бирелмә арасында 1 вариантасының кабатланышы 3 булу зур әһәмияткә ия түгел. Биредә $\frac{3}{50} = 0{,}06$ булганлыктан, бу варианта үлчәүнең гомуми күләменең йөздән алтысын алып тора диләр. Шулай итеп, варианта кабатланышын үлчәүнең күләменә бүлеп, вариантаның ешлыгын табалар.

$$\text{Вариантаның ешлыгы} = \frac{\textit{Вариантаның кабатланышы}}{\textit{Үлчәү күләме}}$$

Барлык варианталарның ешлыкларын инде төзелгән таблицага аерым юл итеп өстиләр. Килеп чыккан таблица – *үлчәүнең ешлыклар бүленеше таблицасы* була. (Y) үлчәвендә ул мондый рәвештә:

	Варианта (дистә минутларда вакыт)										Сумма
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	
Кабатланыш	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Ешлык	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Барлык ешлыкларның суммасы 1 гә тигез; чынлап та ул – вак-лаучылары бер үк, ә санаучылары суммасы шушы ваклаучыга тигез булган вакланмалар суммасы бит. Санауларны һәм графиклар төзүне җиңеләйтү өчен ешлыкларны үлчәү күләменең процентларына күчерәләр. Бүленешләр таблицасына тагын бер юл өстәп, процентлардагы ешлыкны урнаштыралар. Ул үзеннән өстәге юлны 100% ка тапкырлап табыла. Шулай итеп, (Y) үлчәве өчен яңа таблица килеп чыкты:

	Варианта (дистә минутларда вакыт)										**Сумма**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	
Кабатланыш	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Ешлык	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1
Ешлык, %	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2	100

Процентлардагы ешлыклар суммасы, билгеле, 100 гә тигез.

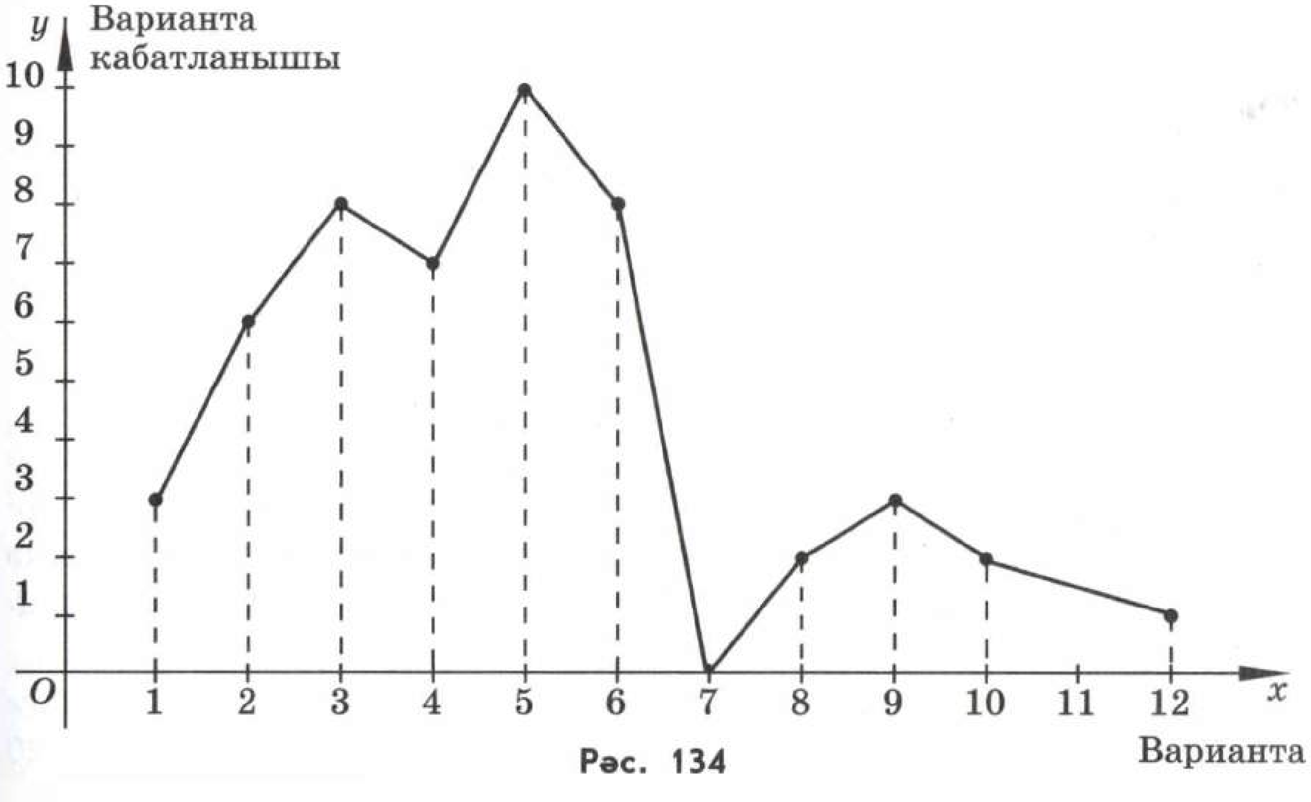
3. Мәгълүматны графикта күрсәтү. Шулай итеп, үлчәү бирелмәләре бүленешен таблицаларда күрсәтү уңай булып чыкты. Тик без функцияләрне дә таблица рәвешендә биреп булганын беләбез. Таблицалар – бирелмәләр бүленешеннән функцияләр һәм графикларга күчүдә «күпер» ролен үтиләр.

Абциссалар күчәре буенча – бүленешләр таблицасының беренче юлы кыйммәтләрен (ягъни варианталарны), ә ординаталар күчәре буенча икенче юлдагы саннарны (варианта кабатланышларын) салабыз. Координаталар яссылыгында тиңдәшле нокталар табабыз. Сайлап алынган бүленешнең графигын, ягъни алынган мәгълүматның график сурәтен төзедек. Табылган нокталарны, күрсәтмәлек өчен, кисемтәләр белән тоташтырабыз. (Y) үлчәвендә без сайлап алган нокталар түбәндәге таблицадан алына.

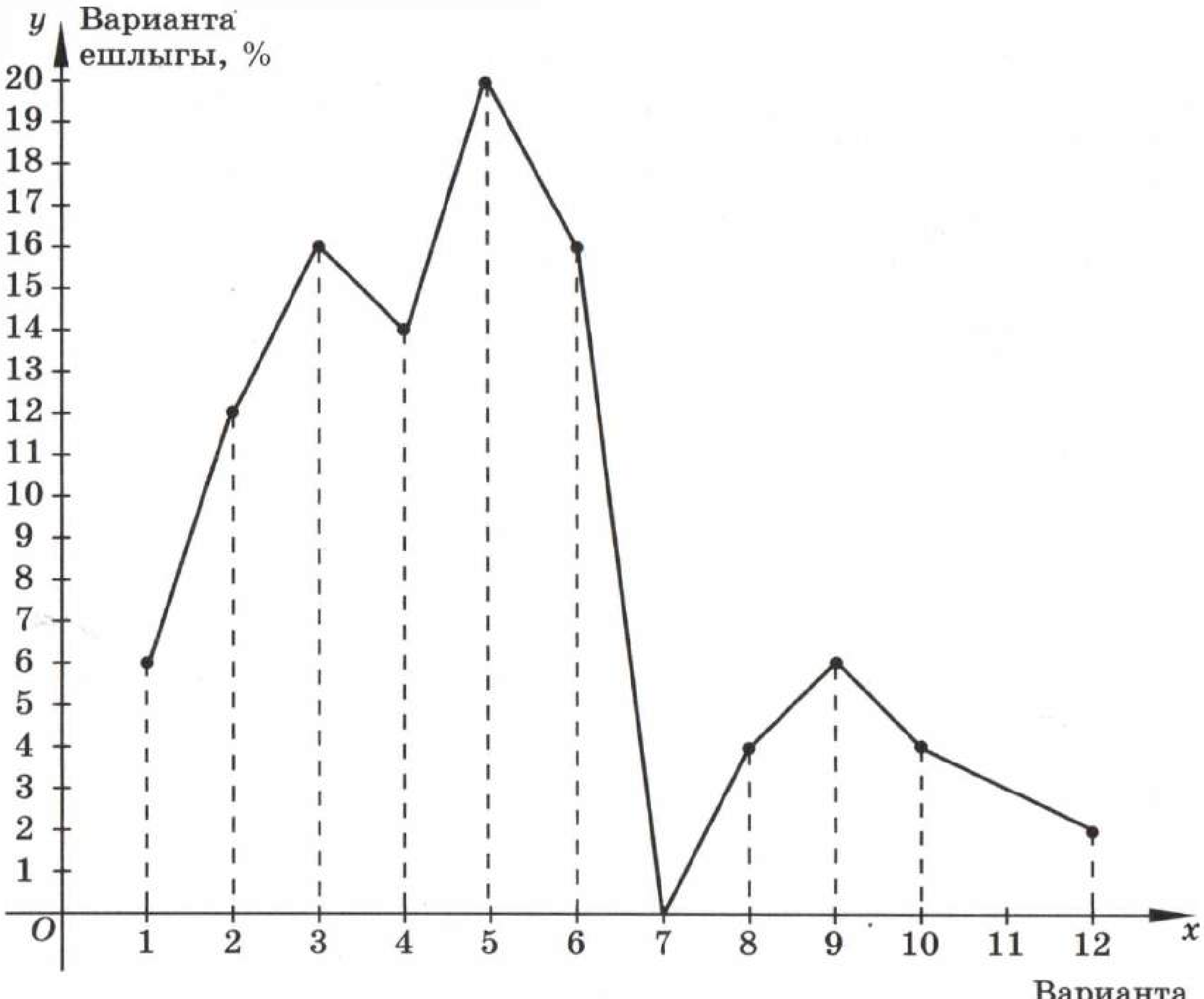
Абсциссалар күчәрендә	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
Ординаталар күчәрендә	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1

Координаталар яссылыгында сынык сызык (134 нче рәсем) таптык – ул ниндидер кисәкле-сызыкча функциянең графигы булып тора. Бу сынык сызыкны *бирелмәләр бүленеше күппочмагы* яки *полигоны* дип атыйлар. Poligon «күппочмак» дип тәрҗемә ителә дә.

Ешлыклар бүленешенең төзелгән таблицалары да *ешлыклар күппочмагын* һәм *процентлардагы ешлык күппочмагын* төзергә мөмкинлек бирәләр. Практикада процентлардагы ешлык күппочмакларын куллану уңайрак, чөнки ординаталар күчәрендә 0 дән 1 гә кадәрлегә караганда 1 дән 100 гә кадәрле үзгәрешләр яхшырак күренә һәм аңлашыла.



Рәс. 134



Рәс. 135

(Y) үлчәве өчен процентлардагы ешлык күппочмагын төзибез (нче рәсем 135).

Абсциссалар күчәрендә	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
Ординаталар күчәрендә	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2

Күргәнебезчә, хәтта бик зур булмаган үлчәү күләме өчен дә мәгълүматны төгәл итеп бүлгәләү – шактый хезмәт сорый торган эш. Зуррак күләмнәр белән эшләгәндә бирелмәләрне якынча төркемләү юлын кулланалар. Мондый очракларда үлчәү вариантасы итеп бер сан түгел, ә санлы аралык алына.

Мәсәлән, (Y) үлчәвендә хезмәткәрләрне өч төркемгә бүлергә була. Беречесе – эш урынына якын яшәүчеләр. Алар юлга 10, 20

яки 30 минут сарыф итәләр. Икенчеләре – бик ерак яшәмәүчеләр. Аларның юлы 40 тан 60 минут дәвам итә. Калганнары ерак яши һәм юлга бер сәгатьтән артык вакыт сарыф итәләр. Шулай итеп, иң кечкенә һәм иң зур вакыт арасын без 1–3; 4–6; 8–12 аралыкларына бүлдек (дистә минутларда). Баштагы ун урынына өч яңа варианта табылды.

Һәр аралык өчен аңа керүче үлчәү нәтиҗәләре санын табарга мөмкин. Яңа варианталарның кабатланышларын һәм бүленеш таблицаларын табабыз.

	Варианта			Сумма
	Якын	Ерак түгел	Ерак	
Кабатланыш	17	25	8	50

Яңа вариантларның ешлыклар бүленеше һәм процентлардагы ешлыклар бүленеше таблицаларын да төзергә була:

	Варианта			Сумма
	Якын	Ерак түгел	Ерак	
Кабатланыш	17	25	8	50
Ешлык, %	34	50	16	100

Мондый якынча бәяләүдә башлангыч мәгълүматтан нәрсәнедер югалтабыз да. Мәсәлән, хәзер юлга 60 минут тотучы хезмәткәрләр санын белмибез. Ләкин мәгълүмат хәзер ачыграк аңлашыла. Мәсәлән, түгәрәк диаграммада ул болайрак күренә (136 нчы рәсем).

Зур күләмле мәгълүматны сурәтләү өчен бүленеш күппочмакларын *гистограммалар* яки *баганалы диаграммалар* белән алыштыралар. Алар белән өлкәнрәк сыйныфларда танышырсыз.

Рәс. 136

4. Үлчәү бирелмәләренең санлы характеристикалары. Һәр кешенең, үзенең паспорт бирелмәләреннән тыш, башка сыйфатлары да бик күп. Кемдер мәсьәләләрне бик яхшы чишә, кемнеңдер чәче кара, кемдер гитарада оста уйный һ. б. Әмма чагыштырмача зур булмаган паспорт мәгълүматы (ФИО, туган көне, паспорт номеры һәм аны бирү датасы) кешене аермачык билгеләргә, аны башкалардан аерырга мөмкинчелек бирә. Әлеге үлчәүләрнең шулай ук төп санлы характеристикалар тупланмасыннан торучы кыскача паспорты бар. Аларның кайберләрен (Y) үлчәвендә ачыклап китик.

Иң зур һәм иң кечкенә варианта арасындагы аерманы *үлчәү колачы* дип атыйлар. (Y) үлчәвендә колач 120−10 = 110 минутка тигез.

Үлчәүдә барысыннан да ешрак очраган вариантаны *үлчәү модасы* дип атыйлар. Әгәр үлчәү бирелмәләре бүленешнең ике юллы таблицасына җыелган булса, моданы табу өчен:

– икенче юлда (кабатланыш) иң зур санны сайлап алырга кирәк;

– табылган саннан бер шакмакка күтәрелергә: бу сан мода була.

Әгәр үлчәү бирелмәләре графикта бүленеш күппочмагы буларак сурәтләнсә, мода – бу күппочмакның иң зур кыйммәте ирешкән нокта була. Мәсәлән, (Y) үлчәвендә мода 50 минутка тигез – иң күп сандагы хезмәткәрләр (10) эшкә шуның кадәр вакытта барып җитә.

Бирелмәләрнең санлы рәтендә иң мөһим характеристикаларның берсе – *уртача кыйммәт (арифметик урта)*.

Уртача кыйммәтне табу өчен:

1) үлчәүнең барлык бирелмәләрен кушарга;

2) табылган сумманы бирелмәләр санына бүләргә кирәк.

Уртача кыйммәтне исәпләү өчен төркемләнгән бирелмәләр рәтен кулану уңай. (Y) үлчәвендә карыйбыз:

Үлчәү бирелмәләренең төркемләнгән рәте
$\underbrace{1, 1, 1}_{3},\ \underbrace{2, \ldots, 2}_{6},\ \underbrace{3, \ldots, 3}_{8},\ \underbrace{4, \ldots, 4}_{7},\ \underbrace{5, \ldots, 5}_{10},\ \underbrace{6, \ldots, 6}_{8},\ 8, 8,\ \underbrace{9, 9, 9}_{3},$ 10, 10, 12

Уртача кыйммәтне табабыз:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{3 + 12 + 24 + 28 + 50 + 48 + 16 + 27 + 20 + 12}{50} = 4{,}8 \text{ (дистә минут).}$$

Димәк, сораштыру үткән хезмәткәрләрнең уртача вакыты 48 минут булган.

Әгәр ешлыклар бүленеше таблицасы инде билгеле булса, уртача кыйммәтне аның буенча да табып була:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + \ldots + 12 \cdot 1}{50} = 1 \cdot \frac{3}{50} + 2 \cdot \frac{6}{50} + 3 \cdot \frac{8}{50} + \ldots +$$

$$+ 12 \cdot \frac{1}{50}.$$

Игътибар итегез: соңгы суммадагы барлык вакланмалар – алар алдындагы тапкырлаучылар сыйфатында торучы варианта ешлыклары. Димәк, ешлыклар бүленеше таблицасында һәр баганадагы саннарны үзара тапкырларга һәм барлык тапкырчыгышларны кушарга кирәк.

	Варианта										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Ешлык	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Тикшерегез: $1 \cdot 0{,}06 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}16 + 8 \cdot 0{,}04 + 9 \cdot 0{,}06 + 10 \cdot 0{,}04 + 12 \cdot 0{,}02 = 4{,}8$.

Гомуми кагыйдә чыгарабыз.

Үлчәү бирелмәләренең уртача кыйммәтен табу өчен:
1) һәр вариантаны аның ешлыгына тапкырларга;
2) табылган тапкырчыгышларны кушарга кирәк.

Бу параграфны тагын бер мисал белән тәмамлыйбыз: моның өчен бирелмәләр эшкәртүнең 1) – 4) адымнарын кабатларбыз (к. 195 б.).

3 нче мисал. Математикадан язма имтиханда 1 дән 10 баллга кадәр алырга мөмкин. Кырык абитуриент шундый билгеләр алган:

6	7	7	8	9	2	10	6	5	6
7	3	7	9	9	2	3	2	6	6
6	7	8	8	2	6	7	9	7	5
9	8	2	6	6	3	7	7	6	6

а) Бирелмәләрнең гомуми рәтен төзергә; алынган билгеләрне тәртипкә салырга һәм төркемләргә.

б) Бирелмәләр бүленеше һәм ешлыклар бүленеше таблицаларын төзергә.

в) Бирелмәләр бүленеше һәм ешлыклар бүленеше графикларын төзергә.

г) Үлчәүнең колачын, модасын һәм уртача кыйммәтен табарга.

Чишү. а) Шундый билгеләр алырга мөмкин: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Бу – *бирелмәләрнең гомуми рәте*. Конкрет үлчәүдә шундый билгеләр генә очрый: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Бу – *бирелмәләр рәте*, андагы барлык саннар – *үлчәү вариантлары*. Ниһаять,

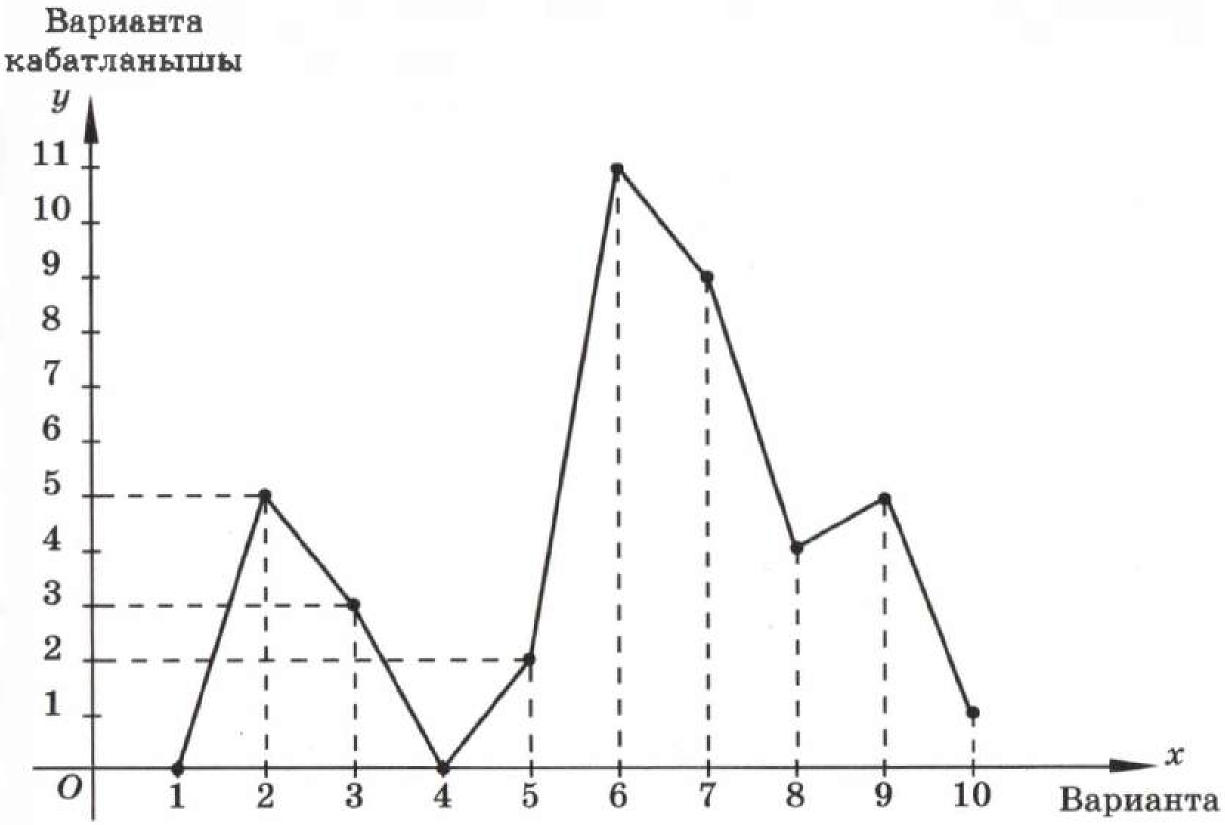
$$\underbrace{2, \ldots, 2}_{5}, 3, 3, 3, 5, 5, \underbrace{6, \ldots, 6}_{11}, \underbrace{7, \ldots, 7}_{9}, \underbrace{8, \ldots, 8}_{4}, \underbrace{9, \ldots, 9}_{5}, 10 \text{ —}$$

Бу – *бирелмәләрнең төркемләнгән рәте*.

б) Барысы 40 билге куелган. Димәк, 40 – бу үлчәүнең *күләме*. Барлык сигез вариантаның кабатланышын таблицага язабыз; шул ук таблицага барлык ешлыкларны исәпләп кертәбез (төгәлрәк: 0,125 — бу $\frac{5}{40}$, 0,075 — бу $\frac{3}{40}$ һ. б.).

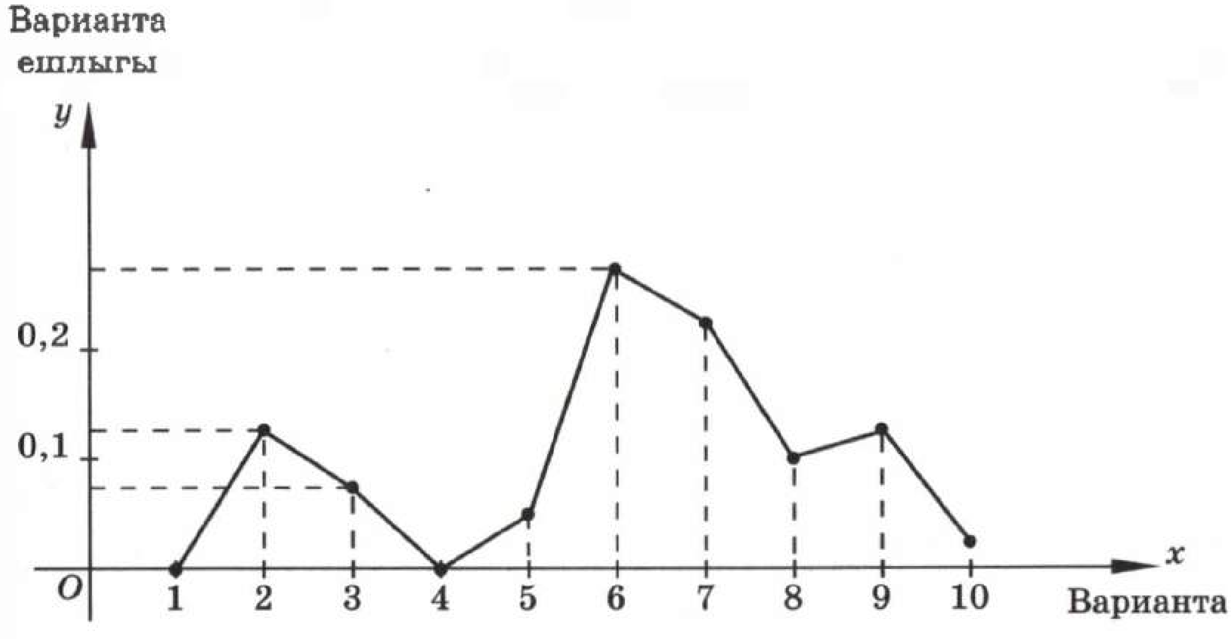
	Варианта								Сумма
	2	3	5	6	7	8	9	10	
Кабатланыш	5	3	2	11	9	4	5	1	40
Ешлык	0,125	0,075	0,05	0,275	0,225	0,1	0,125	0,025	1
Ешлык, %	12,5	7,5	5	27,5	22,5	10	12,5	2,5	100

Бирелмәләр бүленеше күппочмагы

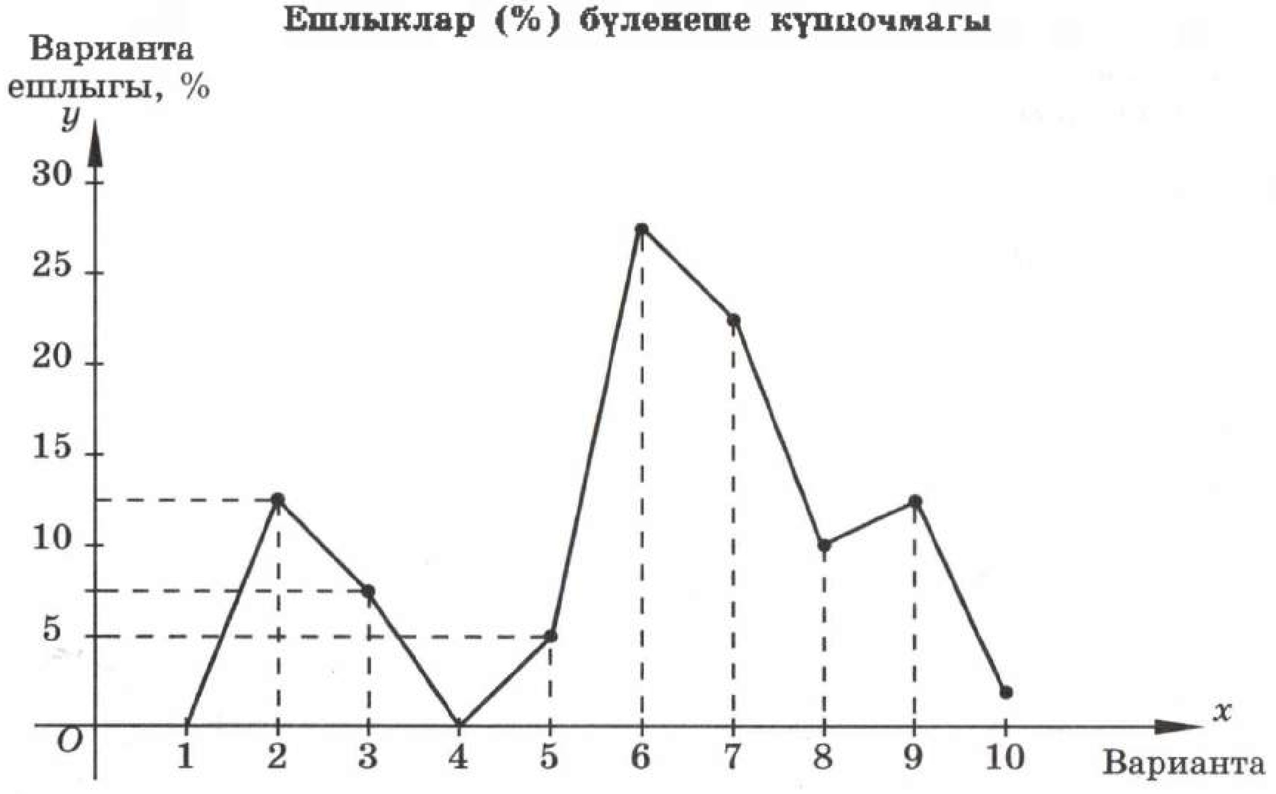


Рәс. 137

Ешлыклар бүленеше күппочмагы



Рәс. 138



Рәс. 139

в) Табылган таблица бирелмә, ешлык һәм процентлардагы ешлык бүленешләре күппочмакларын төзү мөмкинлеген бирә (нче рәсем 137 – 139).

Асылда бу графиклар үлчәү берәмлеген сайлап алу һәм ординаталар күчәренең масштабы белән генә аерылалар.

г) Баштагы бирелмәләргә әйләнеп кайтыйк. Үлчәү колачы 10–2 = 8 гә тигез. *Мода* 6 га тигез – бу билге ешрак очрады. *Уртача кыйммәтне* исәплибез:

$$\frac{2\cdot5+3\cdot3+5\cdot2+6\cdot11+7\cdot9+8\cdot4+9\cdot5+10\cdot1}{40}=$$

$$=\frac{245}{40}=6{,}125.\quad ■$$

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Конкрет үлчәү бирелмәләрен рәвешүзгәртү тәртибе ничә төп этаптан тора?
2. Конкрет үлчәү бирелмәләрен рәвешүзгәртү этапларын атагыз. Бирелмәләрне тәртипкә салу һәм төркемләү нидән гыйбарәт?
3. Бирелмәләрнең гомуми рәте һәм конкрет үлчәү бирелмәләре рәте арасында нинди аерма бар?

4. Түбәндәге бирелмәләр рәтен төркемләгез:
2, 3, 4, 5, 2, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 4, 5, 2, 2, 1, 3, 1, 4, 3, 3, 1, 2, 2.
Бу рәтнең күләме нинди?

5. 4 нче сораудагы бирелмәләр рәтенең барлык варианталарын санап чыгыгыз. Кайсы варианта барыннан да ешрак очрады? Аның кабатланышы нинди?

6. Үлчәү вариантасы (бирелмәләр рәте вариантасы) дип нәрсәне атыйлар?

7. Варианта ешлыгына билгеләмә бирегез. Ни өчен ешлык берәмлектән зур була алмый?

8. Ни өчен барлык үлчәү варианталары ешлыклары суммасы берәмлеккә тигез була?

9. Варианталарның кайсысы үлчәү модасы (бирелмәләр рәте модасы) дип атала?

10. Вариантаның кабатланышы 0 гә тигез була аламы? Җавапны нигезләгез.

11. Бирелмәләрнең төркемләнгән рәте буенча ничек итеп бүленешләр таблицасын төзиләр?

12. Бирелмәләр бүленеше таблицасы буенча бүленешләр полигонын ничек ясыйлар?

13. Уртача кыйммәтне табуның ике кагыйдәсен әйтегез.

14. 4 нче сораудагы рәт өчен уртача кыйммәтне табыгыз.

§ 20. ИҢ ГАДИ ИХТИМАЛЛЫЛЫК МӘСЬӘЛӘЛӘРЕ

Кайбер комбинаторика мәсьәләләре белән без инде § 3 һәм § 18 та очрашкан идек. Аларның һәрберсендә, конкрет мәсьәләнең шартыннан чыгып, мөмкин табылган комбинацияләр санын нindидер юл белән исәпләгән идек. Мәсәлән, 1, 5, 9 цифрларыннан, цифрларны кабатламыйча алты өчурынлы сан төзергә мөмкин: 159, 195, 519, 591, 915, 951. Ә шуларның ничәнче өлешен, мәсәлән, бишкә кабатлы саннар алып тора? Алты саннан икесенең генә бишкә бүленүе күренә: 195 һәм 915. Димәк, бишкә кабатлы саннар барлык төзелгән саннарның өчтән берен алып тора икән. Ихтималлылык теориясендә бу очрак турында:

$\frac{1}{3}$ — *цифрлары кабатланмый торган итеп 1, 5 һәм 9 дан төзелгән өчурынлы санның бишкә кабатлы булу ихтималлылыгы, диләр.*

Шундый тагын берничә мисал тикшерәбез.

1 нче мисал. 1, 5, 9 цифрларыннан, цифрлар кабатланмый торган итеп, очраклы рәвештә өчурынлы сан төзиләр.

а) 500 дән зуррак; б) аннан квадрат тамыр 24 тән зур булмаган; в) өчкә кабатлы; г) тугызга кабатлы сан килеп чыгуның ихтималлылыгы нинди?

Чишү. а) Мөмкин табылган алты саннан: 159, 195, 519, 591, 915, 951 беренче икесе: 159 һәм 195 саннары 500 дән кечерәк, ә аннан соңгы дүртесе: 519, 591, 915, 951 саннары 500 дән зуррак. Димәк, 500 дән зуррак саннар гомуми нәтиҗәләр санының өчтән икесен $\left(\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\right)$ тәшкил итә һәм эзләнелгән ихтималлылык $\frac{2}{3}$ кә тигез була.

б) $24^2 = 576$ булганлыктан, 159, 195, 519 саннарыннан квадрат тамырлар 24 тән кечерәк, ә 591, 915, 951 саннарыннан квадрат тамырлар 24 тән зуррак була. Димәк, безгә кирәкле саннар гомуми нәтиҗәләр санының яртысын тәшкил итә, һәм эзләнелгән ихтималлылык $\frac{1}{2}$ гә тигез була.

в) Бирелгән һәр алты санның цифрлар суммасы 15 кә тигез, ягъни 3 кә бүленә. Шунлыктан алты санның һәрберсе 3 кә кабатлы. $\frac{6}{6}=1$ булганлыктан, эзләнелгән ихтималлылык 1 гә тигез була.

г) Бирелгән һәр санның цифрлары суммасы 15 кә тигез, ягъни 9 га бүленми. Шунлыктан, алар арасында 9 га кабатлысы, гомумән, юк. $\frac{0}{6}=0$, булганлыктан, эзләнелгән ихтималлылык 0 гә тигез була.

Җавап: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0.

1 нче мисалның чишелешен анализлап карыйк. Аның в) пунктында 1, 5, 9 цифрларыннан төзелгән барлык өчурынлы саннарны язып тормаска да мөмкин иде. Цифрларның урынын алыштырудан аларның суммасы үзгәрми, ягъни, барлык саннарның 3 кә кабатлы икәне ачык күренә. Биредә сүз *һичшиксез дөрес (ышанычлы)* хәл (вакыйга) турында бара. Ул 1, 5, 9 цифрларыннан (цифрлары кабатланмаган) нинди генә өчурынлы сан төзелсә дә,

дөрес була. Ә инде г) пунктында, 1, 5, 9 цифрларыннан аларны кабатламыйча нинди өчурынлы сан төзелүгә карамастан, ул 9 га бүленмәячәк. Биредә без *булмаслык* хәл белән очраштык. а) һәм б) пунктларында безне кызыксындырган хәл булырга да, булмаска да мөмкин иде. Мондый хәлләрне *очраклы* дип атыйлар.

Очраклы хәлләрнең иң гади һәм иң билгелесе – вак акча (монета) чөеп уйнау: аның кайсы ягы өстә калуга карап, «иләк» яки «күн» төшүен карыйлар.

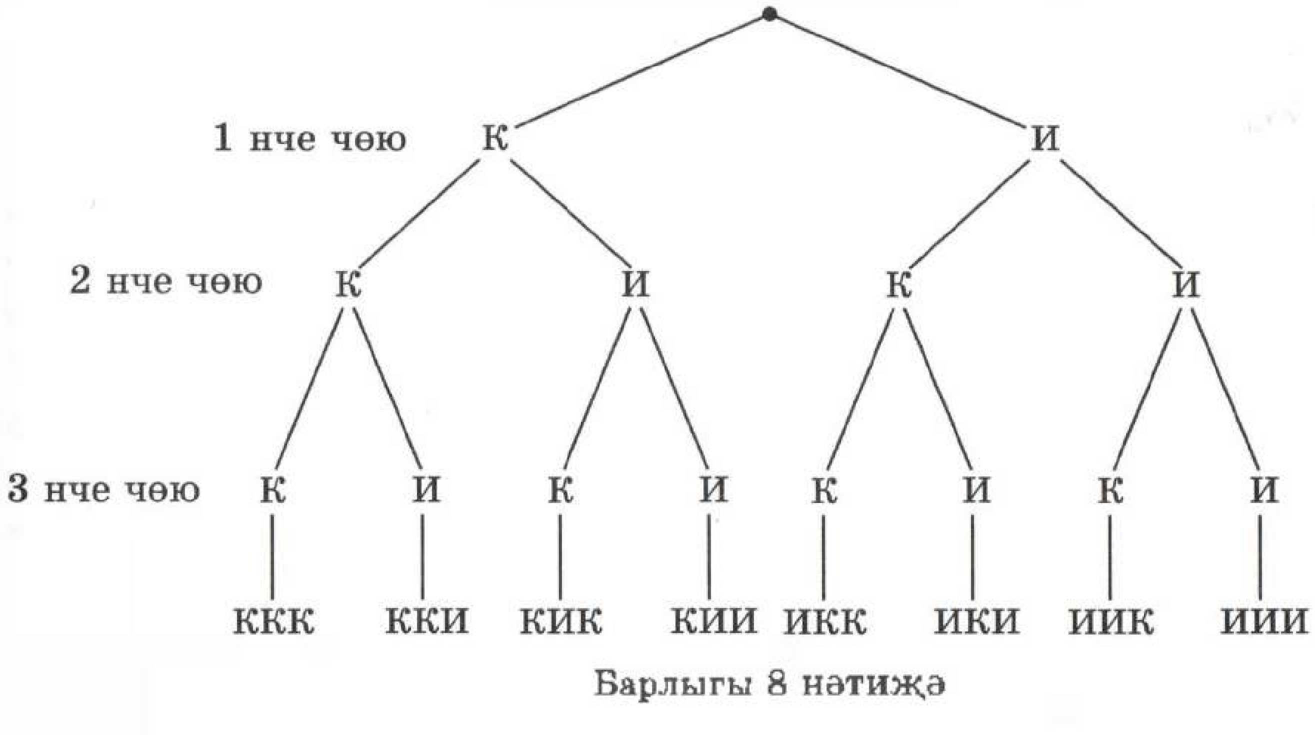
Яңа атамаларга игътибар итегез: очраклы хәл, ышанычлы хәл һәм булмаслык хәл.

2 нче мисал. Монетаны өч тапкыр өскә чөяләр. Түбәндәге ихтималлылыкларны табыгыз:

а) өч тапкыр «иләк» төшә; б) «иләк» «күн»гә караганда ике тапкыр ешрак төшә; в) «күн» «иләк»кә караганда өч тапкыр ешрак төшә; г) беренче һәм өченче чөюдә нәтиҗәләр төрле була.

Чишү. Вариантлар агачын төзибез: биредә И – «иләк» төшүне, К – «күн» төшүне аңлата (нче рәсем 140). Барысы сигез нәтиҗә булуы мөмкин икән: ИИИ, ИИК, ИКИ, ИКК, КИИ, КИК, ККИ, ККК.

а) «Иләк» өч тапкыр сигез нәтиҗәнең берсендә генә төшә ала. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{1}{8} = 0,125$ кә тигез.



Рас. 140

б) Мөмкин булган сигез нәтиҗәнең өчесендә «иләк» «күнгә» караганда ике тапкыр ешрак төшә: **ИИК, ИКИ, КИИ.** Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{3}{8} = 0,375$ кә тигез.

в) Әгәр «иләк» кимендә бер төшсә, «күн» өчтән ким төшмәскә тиеш. Тик бу вакытта кимендә дүрт тапкыр чөяргә кирәк, ә шарт буенча алар өч кенә. Димәк, булмаслык хәл килеп чыкты. Моны барлык сигез нәтиҗәне карап чыгып та күрергә мөмкин. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык 0 гә тигез.

г) Безне кызыксындыра торгын хәл түбәндәге дүрт очракта: **ККИ, КИИ, ИКК, ИИК** кабатлана. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{4}{8} = 0,5$ кә тигез.

Җавап: а) 0,125; б) 0,375; в) 0; г) 0,5.

Чынбарлыкта акча ике ягының берсенә генә төшеп калмаска да мөмкин: ул стенага яки урындык аягына сөялеп калырга, еракка тәгәрәп китәргә һәм югалырга мөмкин, аны берәрсе эләктереп алып китә ала һ. б. Ихтималлылылык исәпләгәндә мондый очракны уйлап бетереп тә булмый. Шуңа күрә алдан килешеп куела: акчаны чөйгәннән соң ике генә очрак – «иләк» һәм «күн» генә мөмкин һәм алар үзара *тигез мөмкинлекле*. Димәк, акчаны бер чөйгәндә «күн» төшү ихтималлылыгы $\frac{1}{2}$ гә *тигез дип фаразлана* һәм «иләк» төшү ихтималлылыгы да шулай ук, бер чөйгәндә $\frac{1}{2}$ гә *тигез дип фаразлана.* Биредә реаль акчаларның иң гади *ихтималый моделе* килеп чыга. Бу модель текстлы мәсьәләләрдә очрый торган хәлне – берничә сәгать буе турысызлыклы шосседан даими тизлек белән баручы автомобиль һәм машина очрагын хәтерләтә. Чынлап та, бу хәрәкәт тә реаль ситуациянең *моделе* генә бит. Әмма иң гади исәпләүләрне әнә шундый гади модельләрдән башлау дөресрәк.

Шулай итеп, очраклы хәлнең ихтималлылыгын исәпләүнең тагын бер юлын өйрәнербез. Шунысы мөһим, бу юл нindидер сынауның барлык нәтиҗәләре дә *тигез мөмкинлекле булганда гына* кулланыла.

КЛАССИК ИХТИМАЛЛЫЛЫК СХЕМАСЫ

Ниндидер сынау үткәргәндә очраклы А хәленең ихтималлылыгын исәпләү өчен:

1) бирелгән сынауның мөмкин булган барлык нәтиҗәләре санын N табарга;

2) сынауның А хәле килеп чыккан нәтиҗәләре санын N(A) табарга;

3) $\frac{N(A)}{N}$ өлешен табарга кирәк; ул А хәленең ихтималлылыгына тигез була.

А хәленең ихтималлылыгын *P*(*A*) дип билгелиләр («ихтималлылык» сүзе французча – *probabilite*, инглизчә «ихтимал» – *probably*). Шулай итеп,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Еш кына алдагы өч пункт (1) – 3)) белән бирелгән схеманы бу җөмлә ярдәмендә белдерәләр.

ИХТИМАЛЛЫЛЫЛЫКНЫҢ КЛАССИК БИЛГЕЛӘМӘСЕ

Ниндидер сынау үткәргәндә А хәленең ихтималлылыгы дип, А хәле килеп чыккан нәтиҗәләр саны белән бу сынауның барлык нәтиҗәләре (үзара тигез мөмкинлекле) саны арасындагы чагыштырманы атыйлар.

Аерым алганда, әгәр ниндидер сынау барышында *A* хәле *булмаслык икән*, $N(A) = 0$ һәм шунлыктан $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{0}{N} = 0$.

Киресенчә, ниндидер сынау барышында *A* хәленең *ышанычлылыгы* $N(A) = N$ һәм шунлыктан $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N}{N} = 1$ икәнен аңлата.

3 нче мисал. *ABCDEFGKL* төзек тугызпочмаклыгында очраклы рәвештә бер диагональ үткәрәләр. Түбәндәге хәлнең ихтималлылыгын исәпләгез:

а) диагональнең ике ягында да түбәләр саны бер үк;

б) диагональнең бер ягында икедән артык түбә бар;

в) диагональ турыпочмаклыктан ниндидер өчпочмак кисеп ала;

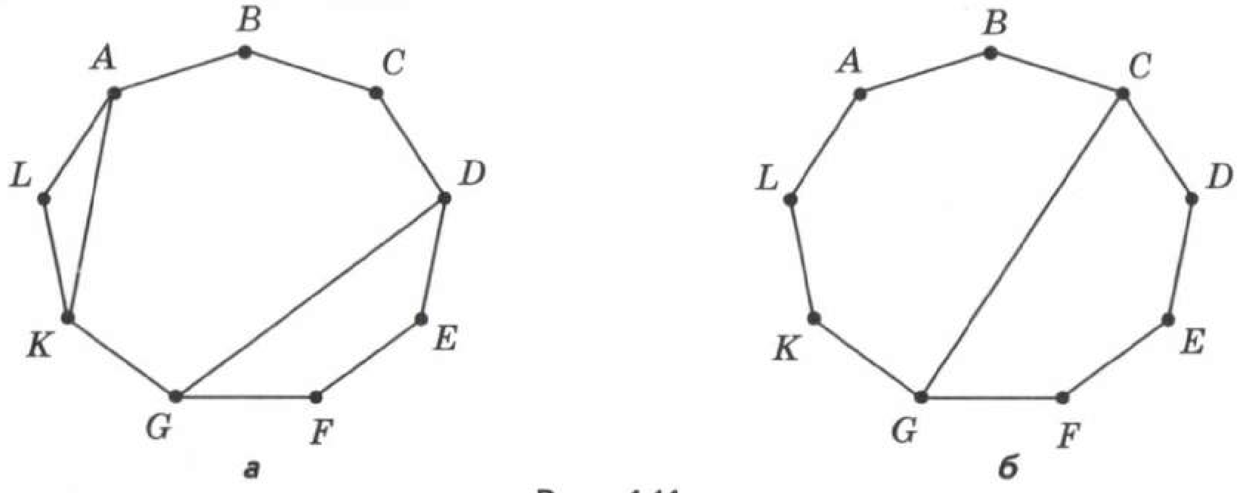
г) диагональнең бер очы – *L* яки *D* түбәсе.

Чишү.

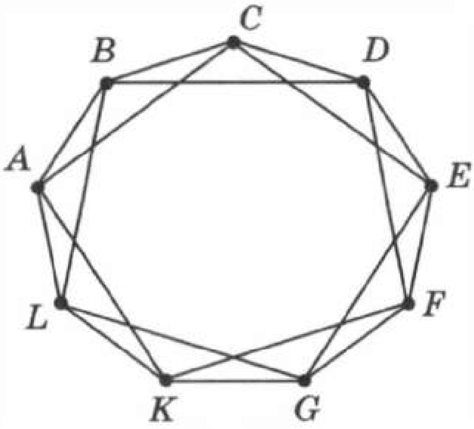
а) Теләсә кайсы диагональ түбәләреннән тыш җиде түбә бар. 7 саны – так сан булганлыктан, ике якта да бер үк сандагы түбәләр ята алмый. Димәк, бу – булмаслык хәл, аның ихтималлылыгы 0 гә тигез.

б) Әгәр диагональнең бер ягында бер генә түбә булса, икенчесендә алты түбә була (нче рәсем 141, *а*); әгәр бер ягында ике түбә булса, икенче ягында – биш түбә (нче рәсем 141, *а*); һәм бер ягында өч түбә булса, икенче ягында дүрт түбә (нче рәсем 141, *б*) ята. Күрәсез, теләсә кайсы очракта диагональнең бер ягында икедән артык түбә бар. Димәк, бу очракта ышанычлы хәл күзәтелә һәм аның ихтималлылыгы 1 гә тигез.

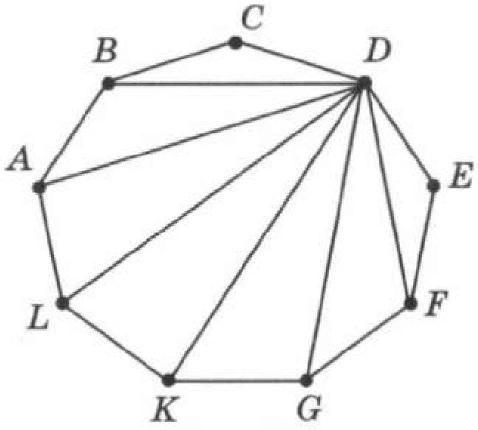
в) Башта барлык диагональләр саны *N* ны санарга кирәк. Диагональнең башын тугыз юл белән, ә ахырын алты юл белән сайлап була, чөнки сайлап алынган түбәдән аның үзенә дә, ике күрше түбәгә дә диагональләр үткәреп булмый. Тапкырлау кагыйдәсе буенча $9 \cdot 6 = 54$ диагональ килеп чыга. Тик болай исәпләгәндә, һәр диагональне, мәсәлән, *DG* диагонален, без ике тапкыр санадык: ул башта башы *D* да, ахыры *G* дагы диагональ итеп тә, башы *G* да, ахыры *D* дагы итеп тә (нче рәсем 141, а) алынды. Димәк, барысы $N = 54 : 2 = 27$ диагональ үткәреп була.



Рәс. 141



Рәс. 142



Рәс. 143

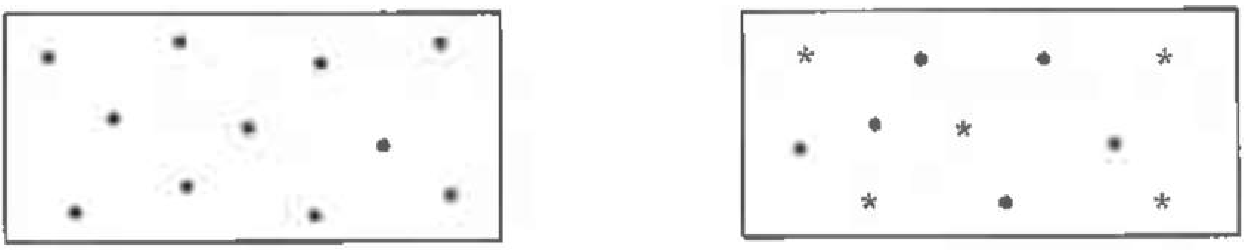
Өчпочмак кисеп алучы диагональләр – AC, BD, CE, DF, EG, FK, GL, KA, BL (нче рәсем 142). Аларның саны $ABCDEFGKL$ дагы түбәләр санына – тугызга тигез. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ гә тигез була.

г) D түбәсеннән алты, һәм L түбәсеннән шулкадәр үк диагональ үткәреп була. Барысы 12 диагональ килеп чыга, әмма без LD диагонален ике тапкыр санадык. Калганнары берәр тапкыр гына саналды. Димәк, безне кызыксындырган хәл 11 очракта килеп чыгарга мөмкин, шунлыктан эзләнелгән ихтималлылык $\frac{11}{27}$ гә тигез була.

Җавап: а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{11}{27}$.

Бер яктан – күплекләр, аларның элементлары һәм аскүплекләр һәм икенче яктан – сынаулар (тәҗрибәләр, экспериментлар), аларның нәтиҗәләре һәм очраклы хәлләр арасында тыгыз бәйләнеш бар. Әйтик, сез ниндидер юл белән ниндидер сынауның мөмкин булган барлык N нәтиҗәсен санап чыктыгыз, ди. Бәлки сез бу нәтиҗәләрне өтер аша бер юлга язгансыздыр. Бәлки һәр нәтиҗәне аерым юлга язып, юлларны номерлагансыздыр. Бәлки нәтиҗәләрне кәгазь битендә ниндидер тамгалар белән сурәтләгәнсездер яки монитор экранына төрле ярлыклар итеп тезгәнсездер һ. б. Иң мөһиме, сез барлык N нәтиҗәне бербөтен күплек итеп карыйсыз һәм аның элементларын берәрләп санап чыгасыз (нче рәсем 144, а).

Хәзер сезне сынаулар үткәргәндә килеп чыгарга яки килеп чыкмаска мөмкин булган ниндидер очраклы A хәле кызыксындыра, ди. Бу A хәленең барлык N нәтиҗә арасыннан *бары тик*



Барысы: N нәтиҗә

Шулардан: $N(A)$ A хәленә уңайлыклы

а б

Рәс. 144

кайберләрендә генә килеп чыгуын аңлата. Аларны билгеләп чыгабыз (144, *б* рәсеммдә йолдызчыклар белән). Ә хәзер сезнең барлык нәтиҗәләрегез исемлегендә $N(A)$ элементтан торучы ниндидер аскүплек барлыкка килде.

Шулай итеп, очраклы A хәле – барлык нәтиҗәләр күплегенең аскүплеген, ә A хәленең ихтималлылыгы – мөмкин булган барлык N нәтиҗә күплегендә A га *уңайлыклы* нәтиҗәләр өлешен хәтерләтә. Аерым алганда, һәр аерым нәтиҗәнең ихтималлылыгы $\frac{1}{N}$ га тигез, ягъни алар барысы да тигез мөмкинлекле.

Түбәндәге таблицада ихтималлылык һәм күплекләр теорияләре атамалары арасындагы бәйләнешне күрсәтәбез.

N нәтиҗәле сынаулар	N элементлы күплек
Сынауның аерым нәтиҗәсе	Күплекнең элементы
Очраклы хәл	Аскүплек
Булмаслык хәл	Буш аскүплек
Ышанычлы хәл	Күплек белән тәңгәл килүче аскүплек
Хәлнең ихтималлылыгы	Күплек элементлары арасында аскүплек элементлары өлеше

Бу таблицаның ике баганасын да дәвам иттерергә мөмкин, икесендә яңа төшенчәләр җитәрлек. Ә юлдан-юлга күчүе – катлаулырак сорау. Ә без, бераз алга китеп, гадәттәгечә мисаллардан башларбыз.

4 нче мисал. 50 ноктаның 17 се зәңгәр төскә, ә калганнарның 13 е кызгылт төскә буялган. Очраклы сайлап алынган

ноктаның: а) зәңгәр; б) кызгылт түгел; в) буялган; г) буялмаган булу *ихт*ималы нинди?

Чишү.

а) $P = \frac{N(\text{зәңгәр нокталар})}{N} = \frac{17}{50} = 0{,}34.$

б) $P = \frac{(N \text{ кызгылт булмаган нокталар})}{N} = \frac{50 - 13}{50} = 0{,}74.$

в) $P = \frac{N(\text{зәңгәр яки кызгылт нокталар})}{N} = \frac{17 + 13}{50} = 0{,}6.$

г) $P = \frac{50 - (17 + 13)}{50} = 0{,}4.$ ■

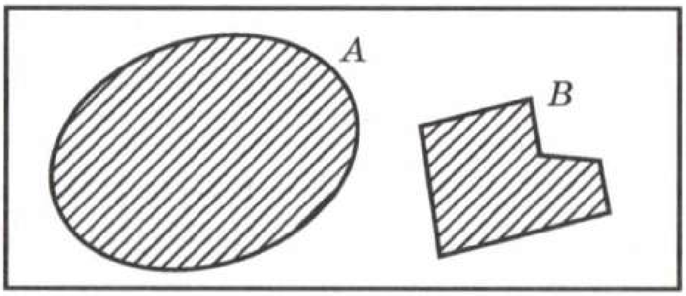
Билгеләмә. Әгәр *B* хәле *A* хәле булмаганда һәм бары тик шул вакытта гына үтәлсә, аны *A* хәленә **капма-каршы** хәл дип атыйлар; билгеләнеше: $B = \bar{A}$. *A* һәм *B* хәлләрен, әгәр алар бер үк вакытта була алмыйлар икән, **үзара сыешмаучан** дип атыйлар.

Үзара сыешмаучан хәлләр сынауның барлык нәтиҗәләре күплегендә кисешми торган аскүплекләр рәвешендә сурәтләнә (145 нче рәсем).

Үзара сыешмаучан хәлләргә типик мисал: теләсә кайсы *A* хәле һәм капма-каршы $\bar{A}$ хәле.

Түбәндәге теореманы исбатлау асылда 4 в) мисалының чишелешен кабатлый.

Теорема 1 *Әгәр A һәм B хәлләре үзара сыешмаучан икән, A яки B булуның ихтималлылыгы P(A) + P(B) га тигез.*



A һәм B үзара сыешмаучан

Рәс. 145

Исбатлау. Безне кызыксындырган хәлне C дип билгелик. C хәле A яки B хәлләренең кимендә берсе булган вакытта һәм бары шунда гына үтәлә. A һәм B үзара сыешмаучан булганлыктан, $N(C) = N(A) + N(B)$. Бу тигезлекнең ике ягын да буынлап N га – барлык нәтиҗәләр санына бүләбез. Табабыз:

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

Теорема исбатланды.

1 теореманы формулалар ярдәмендә язу өчен, бирелгән A һәм B хәлләренең кимендә берсе үтәлгән очракны ничектер атарга һәм билгеләргә кирәк. Мондый хәлне A һәм B хәлләренең *суммасы* дип атыйлар һәм $A + B$ дип билгелиләр. Очраклы хәлләрне кушу операциясен күплекләр теориясе теленә күчерсәк, күплекләрнең берләшмәсе килеп чыга: $x \in A \cup B$ нисбәте нәкъ менә $x \in A$ яки $x \in B$ икәнне аңлата.

Шулай итеп, 1 теореманың кыска язылышы табылды.

Әгәр A һәм B үзара сыешмаучан булсалар, $P(A+B) = P(A)+ + P(B)$.

Теорема 2 *Капма-каршы хәлнең ихтималлылыгын табу өчен берәмлектән бу хәлнең ихтималлылыгын алырга кирәк: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.*

Исбатлау. $A+ \bar{A}$ хәле ышанычлы: сынауның теләсә кайсында яки A хәле, йә $\bar{A}$ хәле үтәлә. Димәк, $P(A+ \bar{A}) = 1$. A хәле һәм аңа капма-каршы $\bar{A}$ хәле – үзара сыешмаучаннар. Димәк, $P(A+ + \bar{A}) = P(A) = P(\bar{A})$. Шуңа күрә $1 = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ һәм $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема исбатланды.

Симметрияле $P(A) = 1-P(\bar{A})$ формуласын куллану да уңайлы санала. Моны капма-каршы хәлнең ихтималлылыгын исәпләү бу хәлнең үзен табуга караганда җиңелрәк булганда эшлиләр. Мәсәлән, «кимендә бер тапкыр» яки аңа охшаш сүзтезмә кулланылган очракларда бу формуланы куллану уңайрак.

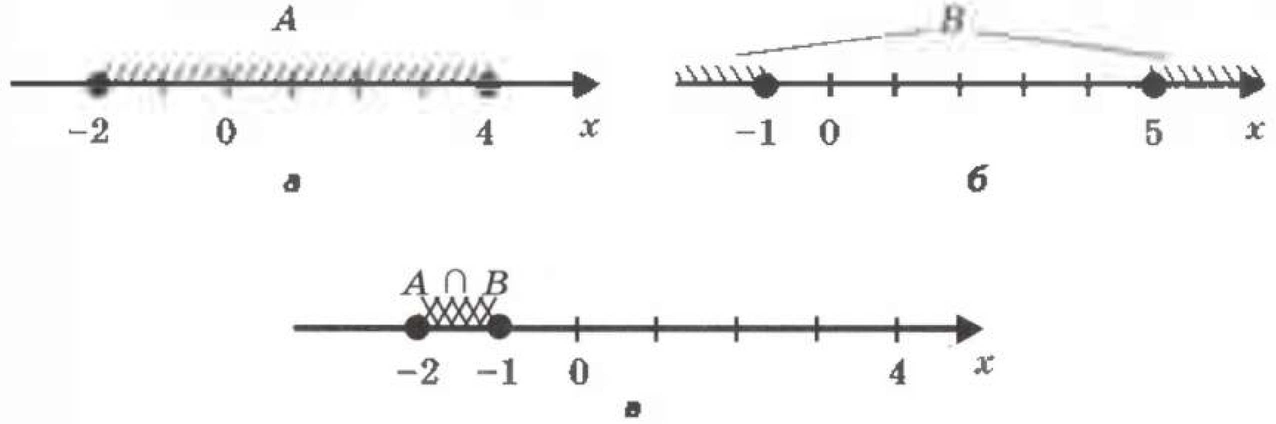
5 нче мисал. Уен кубигын рәттән өч тапкыр чөйгәндә кимендә бер тапкыр 6 төшү ихтималлылыгы нинди?

Чишү. Кубикны бер тапкыр чөйгәндә 1, 2, 3, 4, 5 һәм 6 очко төшү – тигез мөмкинлекле. Икенче тапкыр чөйгәндә, беренче нәтиҗә нинди булуга карамастан, шул ук нәтиҗәләр булырга мөмкин. Тапкырлау кагыйдәсе буенча, өч тапкыр чөйгәндә барысы $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ нәтиҗә мөмкинлеген табабыз. Безне кызыксындырган хәлне, ягъни кимендә бер тапкыр 6 төшүне A дип билгелибез. Ә капма-каршы $\bar{A}$ хәле нидән гыйбарәт? Ул исә алтылының беренче чөюдә дә, икенчесендә дә, өченчесендә дә төшмәвен аңлата. Ул чагында өч тапкырында да 1, 2, 3, 4 һәм 5 цифрларының берсе төшә дигән сүз. Тапкырлау кагыйдәсен тагын бер кат кулланып, $N(\bar{A}) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ не табабыз. Димәк, $P(\bar{A}) = \frac{125}{216} \approx 0,5787$ һәм $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,4213$. ◼

Без нәтиҗәләр күплеген нинди дә булса юл белән исәпләү мөмкин булган ихтималлылык мәсьәләләрен тикшердек. Ягъни, аларда барлык нәтиҗәләр күплеге N *чикле* иде. Нәтиҗәләр күплеге *чиксез* булган сынаулар да була. Аларда ихтималлылыкның классик схемасын кулланып булмый. Мисал карыйк.

6 нчы мисал. Очраклы рәвештә $|x - 1| \leqslant 3$ тигезсезлегенең бер чишелешен сайлап алалар. Аның $|x - 2| \geqslant 3$ тигезсезлеге чишелеше булу ихтималы нинди?

Чишү. Билгеле, башта ике тигезсезлекне дә чишәргә кирәк. $|a - b|$ аермасы модуленең геометрик мәгънәсен искә төшерик – ул саннар турысындагы a һәм b нокталары арасы. Шуңа күрә $|x - 1| \leqslant 3$ тигезсезлеге x һәм 1 нокталары арасының 3 тән зур түгел икәнен аңлата. Димәк, аның чишелеше – [−2; 4]. Бу кисемтәне штрихлыйбыз (146, *а* рәсем). Икенче $|x - 2| \geqslant 3$ тигезсезлеге x һәм 2 нокталары арасының 3 тән ким түгеллеген күрсәтә. Димәк,



Рәс. 146

бу тигезсезлекнең чишелеше: $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ (нче рәсем 146, б). Бу күплекне башкача штрихлыйбыз. Кисешүдә $[-2; -1]$ кисемтәсе табыла (146 нчы, *в* рәсем).

Бирелә без $|x - 1| \leqslant 3$ тигезсезлегенең барлык чишелешләренең алтыдан бер өлеше генә $|x - 2| \geqslant 3$ тигезсезлегенең чишелеше булып торуын күрәбез. Кисемтәнең теләсә кайсы өлешенә эләгү ихтималы кисемтә озынлыгына пропорциональ була. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{1}{6}$ га тигез. ◼

7 нче мисал. Компьютерга кертелгән график редактор мониторда – ягы 12 см булган *ABCD* квадратында очраклы рәвештә бер нокта билгели. Бу ноктаның түбәндәге урыннарда булу ихтималлылыгы нинди:

а) мониторның югары яртысында;

б) мониторның түбәнге һәм сулъяк яртыларында;

в) *D* түбәсеннән 11 см дан да ерак ятмый;

г) *C* түбәсенә караганда мониторның үзәгенә якынрак ята?

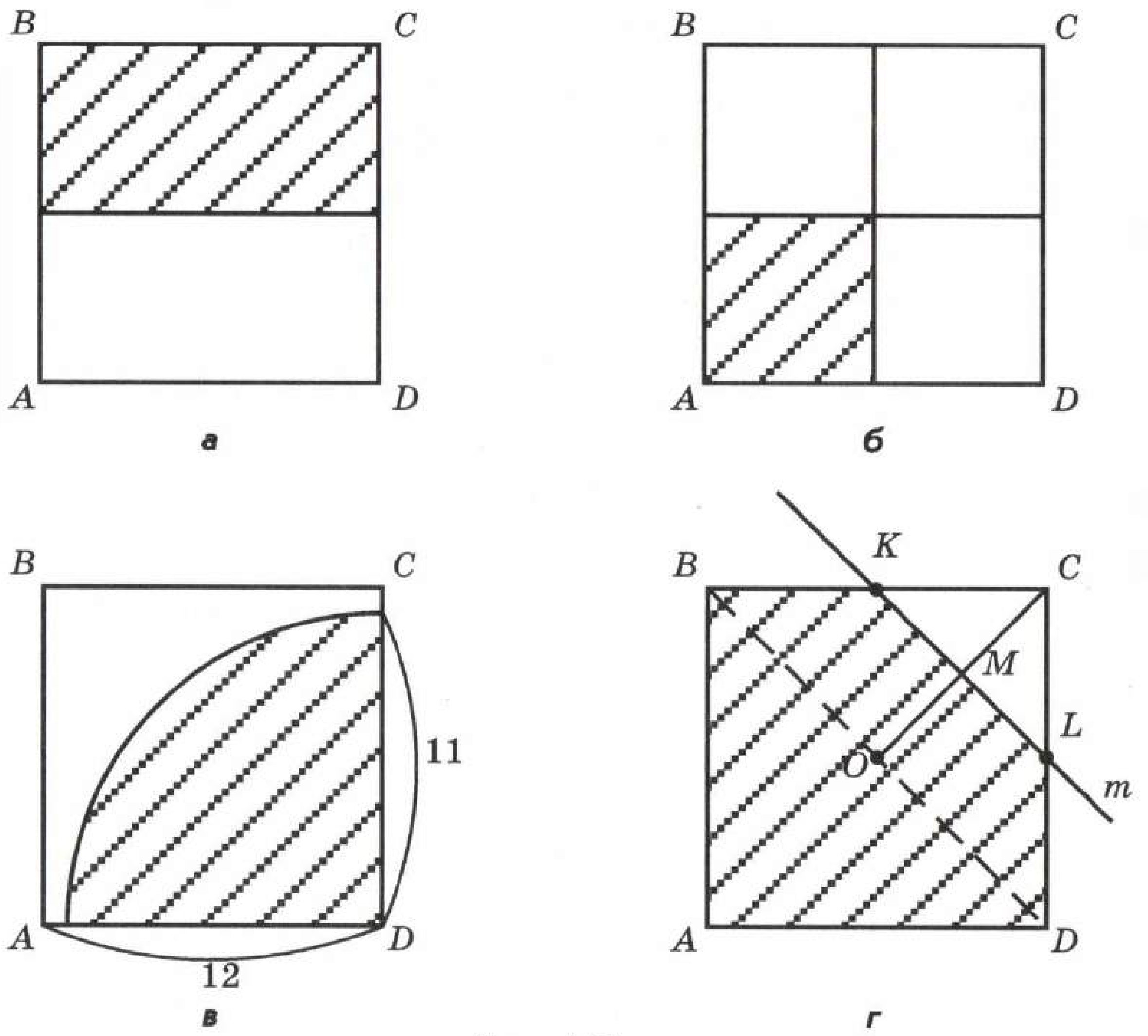
Чишү. а) Мониторның мәйданы 144 $см^2$ га тигез. Аның югары яртысының мәйданы 72 $см^2$. Мониторның теләсә кайсы өлешенә эләгү ихтималы бу өлешнең мәйданына пропорциональ була. Димәк, эзләнелгән ихтималлылык $\frac{72}{144} = 0{,}5$ кә тигез (147, *а* рәсем).

б) Бу очракта редактор мониторның түбәнге сул чирегенең теләсә кайсы ноктасын билгели ала (147, *б* рәсем). Шунлыктан күрсәтелгән очракның ихтималлылыгы 0,25 кә тигез.

в) Радиусы 11 см га тигез һәм үзәге *D* ноктасында булган түгәрәк ясыйбыз. *ABCD* квадраты белән кисешмәсенә бу түгәрәкнең чиреге туры килә (147, в рәсем), аның мәйданы $\frac{1}{4}\pi \cdot 11^2$, ягъни $30{,}25\pi$ була. Бу мәйданның квадрат мәйданының нинди өлешен алып торуын исәплибез:

$$\frac{30{,}25\pi}{144} \approx \frac{30{,}25 \cdot 3{,}14}{144} = \frac{94{,}985}{144} \approx 0{,}66.$$

Мәйданнар чагыштырмасы эзләнелгән ихтималлылыкка тигез



Рәс. 147

була.

г) C түбәсен мониторның үзәге O белән тоташтырабыз. Бу кисемтә уртасыннан m перпендикулярын торгызабыз. Аның нокталары C һәм O нокталарыннан тигез ераклыкта ята, ә m нан югарырак ятучы нокталар үзәккә (O) караганда C га якынрак булалар. Әйтик, $K = m \cap BC$, $L = m \cap CD$, $M = m \cap OC$ булсын. Ул вакытта ΔKCL ның барлык нокталары монитор үзәгенә караганда C түбәсенә якынрак яталар (нче рәсем 147, г).

Биредә $BD = 12\sqrt{2}$, $KL = \frac{1}{2}BD = 6\sqrt{2}$ (BCD өчпочмагының урта сызыгы), $MC = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{4}BD = 3\sqrt{2}$. Димәк, $S_{\Delta KCL} = \frac{1}{2}KL \cdot MC =$ $= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$

Мониторның S мәйданы 144 см^2 булганлыктан, ноктаны KCL өчпочмагыннан сайлап алу ихтималы $\frac{S_{\Delta KCL}}{S} = \frac{18}{144} = 0,125$ кә тигез.

Шарт буенча безгә ΔKCL га эләккәннең капма-каршы очраклары ихтималы кирәк, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ формуласы буенча эзләнелгән ихтималлылыкны исәплибез: $1 - 0,125 = 0,875$.

Җавап: а) 0,5; б) 0,25; в) ≈ 0,66; г) 0,875.

Геометрик ихтималлылыкларны табу өчен гомуми кагыйдә чыгарабыз. A фигурасының мәйданы $S(A)$ ны A фигурасын тулысынча үз эченә алган x фигурасы мәйданы $S(x)$ ка бүлгәч, x фигурасыннан очраклы сайлап алынган ноктаның A фигурасында урнашу ихтималлылыгы: $P = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Саннар турысындагы күплекләр дә, пространство җисемнәре дә шушы кагыйдәгә буйсына. Тик бу очракларда мәйданнарны йә санлы күплекләрнең озынлыклары, йә пространство җисемнәренең күләмнәре белән алыштырырга кирәк. Биредә нокталарның бик күп һәм аларның тигез мөмкинлекле булулары аркасында, сайлап алу дискрет характерда булса да, өзлексез ихтималлылык дигән төшенчәне кулланырга туры килә.

Үз-үзеңне тикшерү өчен сораулар

1. Монетаны ике тапкыр чөяләр. Ике тапкыр «күн» төшү ихтималы ничәгә тигез?

2. Монетаны ике тапкыр чөяләр. Нәтиҗәләр бер үк булу ихтималы ничәгә тигез?

3. Монетаны өч тапкыр чөяләр. Вариантлар агачын ясагыз. Беренче һәм икенче тапкырында нәтиҗәләр бер үк булу ихтималы нинди?

4. Уен кубигын ике тапкыр чөяләр. Төшкән очколар суммасының 1 һәм 13 булу ихтималы нинди?

5. Уен кубигын ике тапкыр чөяләр. Төшкән очколар тапкырчыгышының 40 тан кечерәк һәм 0,9 дан зуррак булу ихтималы нинди?

6. Ни өчен ышанычлы хәлнең ихтималлылыгы һәрвакыт 1 гә тигез?

7. Ни өчен мөмкин булмаган хәлнең ихтималлылыгы һәрвакыт 0 гә тигез?

8. Классик ихтималлылык схемасы ничә адымнан тора?

9. Ни өчен теләсә нинди хәлнең ихтималлылыгы 1 дән зур була алмый?

10. *A* хәленә капма-каршы хәлнең билгеләмәсен әйтегез.

11. Капма-каршы хәлнең ихтималлылыгын табу турындагы теореманы әйтегез.

12. Нинди ике хәл сыешмаучан дип аталалар?

13. Ике сыешмаучан хәл суммасының ихтималлылыгы $P(A + B)$ турындагы теореманы әйтегез.

14. [0; 5] кисемтәсендә уйламыйча гына нокта сайлыйлар. Аның 3 санына 1 саныннан якынрак урнашу ихтималлылыгы нинди?

15. «Крестики-нолики» уены өчен 3 • 3 кырында уйламыйча гына нокта сайлап алалар. Аның үзәк квадратта булу ихтималлылыгы нинди?

§ 21. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬ БИРЕЛМӘЛӘР ҺӘМ ВАКЫЙГАЛАРНЫҢ ИХТИМАЛЛЫЛЫГЫ

Соңгы параграфта без очраклы вакыйгаларның (*хәлләрнең*) ихтималлылыгы (§ 20) белән статистик экспериментал бирелмәләр (§ 19) арасындагы бәйләнеш турында сөйләрбез. Исегезгә төшерәбез, статистик бирелмәләр, кагыйдә буларак, нинди дә булса *реаль* хәл үлчәүләреннән гыйбарәт, ә очраклы хәлләрне, ягъни вакыйгаларны исәпләгәндә, без реаль хәлнең *моделе* белән эш итәбез. Реальлек белән аның моделе үзара ничек бәйләнгән икән? Безне әйләндереп алган дөнья турында теоретик күзаллауларыбыз чынбарлыкны ни дәрәҗәдә төгәл билгели алалар икән?

Очраклы хәлләрнең иң билгелесе – вак акча чөю белән бәйле бер мисалны тикшерик.

1 нче мисал. Бирелмәләр эшкәртү буенча практик дәресләрдә 20 укучының һәркайсы, бер сумлык вак акчаны 50 тапкыр чөеп, «күн» төшкән очраклар санын (k) санаган һәм бу санны чөюләрнең гомуми санына карата процентларда язып куйган. Бу саннарны таблицада күрә аласыз.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	24	27	23	26	28	25	24	25	26	22	23	23	22	26	27	24	23	29	30	21
%	48	54	46	52	56	50	48	50	52	44	46	46	44	52	54	48	46	58	60	42

Күргәнебезчә, нәтиҗәләр 21 белән 30 арасында. Әгәр «күн» төшүнең ешлыгын процентларда карасак, нәтиҗәләр 42 дән 60 % ка кадәр. Бер яктан караганда, барлык чөюләр санының *нәкъ яртысы* (25) бары ике укучыда гына булган. Әмма икенче яктан, башка нәтиҗәләрнең дә 25 тән тайпылышы артык зур түгел; иң зур тайпылыш 5 кә тигез, ягъни акча чөюләр санының 10% ын тәшкил итә. Алынган нәтиҗәләрне эрерәк төркемнәргә берләштерик. №1 һәм №2 нәтиҗәләр суммасын 100 тапкыр чөю нәтиҗәсе дип, №3 һәм №4 нәтиҗәләр суммасын 100 чөюнең икенче нәтиҗәсе һ. б. исәплик. Яңа таблица табабыз.

№	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10	11–12	13–14	15–16	17–18	19–20
k	51	49	53	49	48	46	48	51	52	51

Биредә процентларга күчереп торуның кирәге юк, чөнки 100 чөюдә 51 «күн» төшү – 51% ны аңлата да инде. Монысында 100 чөюдән *ярты* нәтиҗә очрамый, әмма шушы яртыдан тайпылышлар кимегән һәм алар инде 4% тан да артык түгел. Эреләндерүне дәвам итәбез. 200 әр чөю итеп төркемләгәч нәрсә булганын карыйк.

№	1–4	5–8	9–12	13–16	17–20
k	100	102	94	99	103
%	50	51	47	49,5	51,5

Чөюләр саны арта барган саен, «күн» төшү ешлыгының гомуми чөюләр санының яртысына якынаюын күрәбез. Әгәр барлык чөюләрне – очраклы нәтиҗәле иң гади бер үк эксперимент кабатлануы дип карасак, бу бигрәк тә ачык күренә. Үткәрелгән барлык $20 \cdot 50 = 1000$ чөюдә 498 тапкыр «күн» төшкән.

$$100 + 102 + 94 + 99 + 103 = 500 + (0 + 2 - 6 - 1 + 3) = 498.$$

Шулай итеп, «күн» төшүнең процентлардагы ешлыгы 49,8%, һәм яртыдан, ягъни 50% тан тайпылыш бары 0,2 %. ■

Гомумән, экспериментлар санын зуррак санда үткәрүләр «күн» төшү ешлыгының 0,5 тән, яки 50% тан бөтенләй диярлек аерылмавын күрсәтә. Мәсәлән, статистика яки ихтималлылык теориясе буенча дәреслекләрдә француз галиме Ж. Бюффон (XVIII йөз) һәм инглиз математигы К. Пирсонның (XIX йөз ахыры) тәҗрибә нәтиҗәләре китерелә. Алар акчаны тиндәшле рәвештә 4040 һәм 24000 тапкыр чөйгәннәр, 2048 һәм 12012 тапкыр «күн» төшкән.

«Күн» төшүнең ешлыгын процентларда күрсәтсәк, $\frac{2048}{4040}$ = 0,50693... (Бюффонча) һәм $\frac{12012}{24000}$ = 0,5005 (Пирсонча) килеп чыга.

Билгеләмә. Үзгәрешсез шартлардагы бер үк тәҗрибәнең бәйсез кабатланулары санын чиксез арттыра барганда, билгеләнгән очраклы хәл килеп чыгу ешлыгының ниндидер даими санга якынаюы ышанычлы була. Бу күренеш – **статистик тотрыклылык** дип, ә күрсәткеч сан **хәлнең статистик ихтималлылыгы** дип атала.

Шунысы ачык, тәҗрибәне һәр конкрет кабатлаулар саны хәлнең ихтималлылыгыннан аерылырга да мөмкин. Статистик тотрыклылык тәҗрибәне кабатлаулар санын арттырудан хәлнең ешлыгы белән аның ихтималлылыгы арасындагы аерма нульгә якынлашуны гарантияли.

Мондый тотрыклылык, акча чөйгәндә генә түгел, ниндидер картаны тартып чыгару өчен дә, уен кубикларында билгеләнгән очколар саны төшү, уртача тәүлеклек температураны исәпләү һәм, гомумән, күпчелек очраклы хәлләр өчен урынлы. Статистик тотрыклылык күренеше реаль үткәрелә торган *эмпирик* сынауларны бу сынауларның теоретик модельләре белән бәйли.

2 нче мисал. Бик күп санлы әдәби текстларны статистик өйрәнүләр шуны күрсәтә, текстның күләме зурайган саен, ниндидер хәрефләрнең (яки сүзләр арасындагы бушлыкның) күренү ешлыклары билгеләнгән кайбер константаларга якыная икән. Рус телендә хәрефләрнең (Ё һәм Ъ нән башка) очрау *ешлыгы таблицасын* китерәбез (ешлык процентларда бирелгән).

Хәреф	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й
Ешлык	6,2	1,4	3,8	1,1	2,5	7,2	0,7	1,6	6,2	1,0
Хәреф	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Ешлык	2,8	3,5	2,6	5,3	9,0	2,3	4,0	4,5	5,3	2,1	0,2
Хәреф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	–
Ешлык	0,9	0,4	0,4	0,6	0,3	1,6	1,4	0,3	0,6	1,8	17,5

Һәр авторның хәрефләр, сүзләр, үзенчәлекле әдәби сүзтезмәләр һ. б. кулланылуының үз ешлык таблицасы бар. Шундый ешлык таблицасы буенча авторны билгеләү – бармак эзләре буенча кешене билгеләүгә тиң.

Бик күптән булмаган ике мисал китерәбез. Бүгенге көнгә кадәр «Тын Дон» әсәренең авторына караган бәхәсләр тынмый. Күпләр шундый бөек һәм тирәнтен уйланган китапны 23 яшьлек М.А. Шолохов берничек тә яза алмаган дип уйлый. Төрле аргументлар, төрле кандидатлар һәм авторлар китерелә. 1965 елда, Нобель премиясе бирелү көннәрендә, бу бәхәсләр аеруча кискенләшә. Текстларга статистик анализ ясау һәм аны М.А. Шолоховның һичшиксез авторлыгы расланган текстлары белән чагыштыру – аның «Тын Дон»ның чын авторы икәнен күрсәтәләр.

Икенче вакыйга сәяси төс алган була. 1960 еллар башында «Көнбатышта» (ул вакытта СССРда шундый атама була) «социалистик системаның прогрессив характерын каралтып күрсәтүче ... » әдәби әсәрләр басыла. Авторы А. Терц дип күрсәтелсә дә, бу исемнең псевдоним булуына шикләнмиләр. Тикшерүче органнарда әлеге «зыянлы» текстларга статистик анализ ясыйлар һәм нәтиҗәне авторлыкка кандидат саналучы берничә кешенең билгеле текстлары белән чагыштыралар. Шулай итеп, бу текстларны әдәбият белгече Андрей Синявский язганы ачыклана. Ә ул авторлыгын кире какмый һәм 1966 елда суд карары белән («Синявский һәм Даниэль процессы») җиде елга хөкем ителә. Менә шундый статистика.

Кодлаштырылган текстларны ачуда (шифрын табу) статистика куллану турында мисал китерәбез. Текстлы хәбәрләрне шифрлауда бик билгеле юлларның берсен карыйк. Хәбәр нинди алфавитта җибәрелсә, шул ук алфавитның һәр хәрефен андагы икенче хәреф белән алыштыралар. Алфавит хәрефләрен алыштырып куялар. Мәсәлән,

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	...	Я
Я	Ы	Ё	Ж	З	М	Ф	Щ	О	Ю	Р	Т	С	Ч	Ш		А

Ул чагында «милая мама» сүзләре «сютяа сяся» дип шифрлана. Үзендә хәрефләрне алыштыру таблицасы булган адресат (хат алучы) серле «тшжюря» сүзенең дә кире тәрҗемәсен җиңел таба (моны үзегез дә эшләп карагыз, безнең вариант параграф ахырында). Әгәр хәбәр элактереп алынса һәм шифрлау коды билгеле булмаса – ярдәмгә статистика килә. Әйтик, шактый зур текст җибәрелгән, ди. Мәсәлән, машинкада җыелган бер бит тирәсе булсын. Һәр юлда 60–70 хәрефле 30–40 юл, ягъни 2000 тирәсе «шифрланган» хәреф килеп чыга. Алар өчен бу текстта очрауларның ешлык таблицасын төзибез һәм аны рус алфавитындагы «чын» хәрефләр очрау таблицасы белән чагыштырабыз (к. 225 б.). Әгәр нинди дә булса хәреф, мәсәлән Й өчен исәпләнелгән ешлык 9% тан артса, бу хәреф белән беренчел текстның О хәрефе шифрланган дип ышанып әйтергә мөмкин. Әгәр

хәрефнең, мәсәлән М ның ешлыгы 7% тирәсе булса, бу Е хәрефе булырга тиеш. Билгеле, болай бик тә якынча гына эшләп була, чөнки мәсәлән *А* һәм И яки Ц һәм Ч хәрефләрен ешлыгы буенча аерып булмый. Биредә әле рус теле грамматикасын да, хәрефләрнең генә түгел, ә тотрыклы хәреф тезмәләрен (СТ, ПРО), теркәгечләрне, хәбәрнең гомуми мәгънәсен һ. б. исәпкә алырга, һәм нәтиҗәдә уңышлы гына текстның шифрын ачарга мөмкин.

Алфавит хәрефләрен ирекле тамгалар белән алыштырган очракта да шундый ук статистик алым үз көчендә кала, мәсәлән:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	...	Я
W	{	пробел	!	Q	∅	;	©	@		§

Статистик тотрыклылык күренеше вакыйга (яки хәлнең) ихтималлылыгын әле без аларны белмәгән очракларда да якынча бәяләү мөмкинлеген бирә. Чынлап та, әйтик, ниндидер сынау үткәргәндә *А* хәленең ихтималлылыгын табарга яки бәяләргә кирәк булды, ди. Үзгәрешсез шартларда бу сынауның бәйсез кабатлануларын үткәрергә туры килер. Кабатлаулар барышында безне кызыксындырган *А* хәле килеп чыккан кабатлауларны билгеләп барабыз һәм *А* хәле ешлыгын исәплибез.

Статистик тотрыклылык, сынау кабатлауларын күп санлы итеп үткәргәндә, исәпләнә торган ешлыкның әлегә билгесез *А* хәле ихтималлылыгы белән якынча тәңгәл килүен аңлата. Димәк, табылган ешлык якынча *А* хәле ихтималлылыгына тигез була. Тик шунысын онытмаска кирәк: килеп чыгу ешлыгын без *реаль* саннар өчен санап барабыз, ә ихтималлылыкны бу хәлләрнең *теоретик моделе* өчен исәплибез.

3 нче мисал. Ун уенчының һәркайсы рәттән 50 тапкыр төрле төстәге өч уен сөяген бер үк вакытта чөя һәм алтылы төшмәгән чөюләр саны *k* ны санап чыгара. Шундый нәтиҗәләр табылган:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28

а) Һәр уенчы өчен алтылы төшмәгән ешлыклар (процентларда) таблицасын төзергә.

б) 1—2, 3—4, ..., 9—10 уенчыларның нәтиҗәләре өчен алтылы төшмәү ешлыклары (процентларда) таблицасын төзергә.

в) Барлык 500 чөелү өчен алтылы төшмәү ешлыгы нинди булыр?

г) Өч уен сөяген ыргытканда алтылы төшмәү ихтималлылыгын табарга.

Чишү.

а)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28
%	56	64	48	60	62	50	58	58	54	56

б)

№	1—2	3—4	5—6	7—8	9—10
%	60	54	56	58	55

в) Барлык 500 чөюнең 283 ендә алтылы булмаган. Димәк, ешлык $\frac{283}{500} = 0{,}566$, яки 56,6%.

г) Классик ихтималлылык схемасы буенча исәплибез. Тапкырлау кагыйдәсе буенча өч төрле уен сөяген чөйгәндә $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ төрле нәтиҗә булырга мөмкин. Әйтик, A – алтылы төшмәүдән гыйбарәт булган хәл, ди. Бу һәр сөяк өчен биш кенә тигез мөмкинлекле нәтиҗә калуын аңлата: 1, 2, 3, 4, 5. Тапкырлау кагыйдәсен кабат кулланабыз: $N(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Димәк,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787.$$

Шулай тиеп, классик ихтималлылык моделе буенча исәпләп, алтылы төшмәүнең теоретик ихтималлылыгы якынча 57,9%, ә практик юл белән исәпләнелгән статистик ешлык 56,6% булды. Аерма булса да, әллә ни зур роль уйный торган түгел. ◾

Һәм йомгаклау: «тшжюря» – «логика» иде.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

- Сез иң гади комбинаторика мәсьәләләрен чишүнең төп юллары белән таныштыгыз:

  вариантларны карап чыгу;

  вариантлар агачын төзү;

  тапкырлау кагыйдәсе.

- Без яңа төшенчә керттек: факториал.

- Сез күп кенә ихтималлылык мәсьәләләренең асылын тәшкил иткән яңа математик модель – классик ихтималлылык схемасы белән таныштыгыз. Бу модельдә ихтималлылыкны исәпләү өчен $P(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ формуласы кулланыла.

- Сез очраклы хәлләрнең төп төрләре турында белдегез:

  ышанычлы һәм булмаслык хәлләр;

  сыешмаучан хәлләр;

  бирелгән хәлгә капма-каршы хәл;

  ике очраклы хәлнең суммасы.

- Без өч теореманы исбатладык:

  n элементтан торучы күплектә алыштырмалар саны турында: $P_n = n!$;

  ике сыешмаучан хәл суммасының ихтималлылыгы турында;

  капма-каршы хәлнең ихтималлылыгы турында.

- Без теге яки бу эксперимент үткәргәндә алынган үлчәү нәтиҗәләрен иң гади статистик эшкәртү алымнарын тикшердек.

- Сез яңа төшенчәләр һәм атамалар белдегез:

  бирелмәләрнең гомуми рәте һәм конкрет үлчәү бирелмәләре рәте;

  бирелмәләр рәте вариантасы, аның кабатланышы, ешлыгы, процентлардагы ешлыгы;

  бирелмәләрнең төркемләнгән рәте;

  бүленеш күппочмагы.

- Сез нинди дә булса эксперимент үткәргәндә алынган мәгълүматның иң гади санлы характеристикалары белән таныштыгыз:

күләм;

колач;

мода;

уртача кыйммәт.

ТИКШЕРЕНҮ ЭШЛӘРЕ ӨЧЕН ТЕМАЛАР

1. Тапкырлауның күпкырлы кагыйдәсе.
2. Вариантлар агачын ясыйбыз.
3. Факториал һәм аның үзлекләре.
4. Классик ихтималлылык уеннары: монета, кубик чөю.
5. Геометрия һәм ихтималлылык.
6. Сезнең сыйныфта статистика: буй, авырлык, туган көннең атнаның кайсы көненә туры килүе, фән буенча билгеләрнең уртача кыйммәте һ. б.

ЭЧТӘЛЕК

Укытучы өчен кереш сүз 4

1 бүлек. РАЦИОНАЛЬ ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР ҺӘМ АЛАРНЫҢ СИСТЕМАЛАРЫ

§ 1. Сызыкча һәм квадрат тигезсезлекләр 5
§ 2. Рациональ тигезсезлекләр 13
§ 3. Күплекләр һәм алар белән гамәлләр 25
§ 4. Тигезсезлекләр системалары 42
1 нче контроль эш 50

2 бүлек. ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАЛАРЫ

§ 5. Төп төшенчәләр 52
§ 6. Тигезләмә системаларын чишү юллары 72
§ 7. Реаль хәлләрнең математик модельләре буларак тигезләмә системалары 79
2 нче контроль эш 86

3 бүлек. САНЛЫ ФУНКЦИЯЛӘР

§ 8. Санлы функциянең билгеләмәсе. Функциянең билгеләнү өлкәсе, кыйммәтләре өлкәсе 88
§ 9. Функцияне бирү юллары 96
§ 10. Функцияләрнең үзлекләре 103
§ 11. Җөп һәм так функцияләр 116
§ 12. $y = x^n$ $(n \in N)$ функцияләре, аларның үзлекләре һәм графиклары 122
§ 13. $y = x^{-n}$ $(n \in N)$ функцияләре, аларның үзлекләре һәм графиклары 130
§ 14. $y = \sqrt{x}$, функциясе, аның үзлекләре һәм графигы 137
Төп нәтиҗәләр 145

4 бүлек. ПРОГРЕССИЯЛӘР

§ 15. Санлы эзлеклелекләр 146

§ 16. Арифметик прогрессия 156

§ 17. Геометрик прогрессия 167

Төп нәтиҗәләр 182

5 бүлек. КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА ҺӘМ ИХТИМАЛЛЫЛЫК ТЕОРИЯСЕ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

§ 18. Комбинаторика мәсьәләләре 184

§ 19. Статистика: мәгълүмат дизайны 194

§ 20. Иң гади ихтималлылык мәсьәләләре 209

§ 21. Эксперименталь бирелмәләр һәм вакыйгаларның ихтималлылыгы 223

Төп нәтиҗәләр 229

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geqslant 2)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$\because\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \quad (n \geqslant 2)$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$(b_1 \neq 0,\ q \neq 0)$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Алгебра

2 кисәк
дәреслек

9

Хәтер

ISBN 978-5-346-03029-4

9 785346 030294 >

ISBN 978-5-94113-443-4

9 785941 134434 >